ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Текстильная геометрия

1990

Квант

7 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Интервью с В. И. Арнольдом

Представляем нашим читателям Владимира Игоревича Арнольда — члена-корреспондента Академии наук СССР, лауреата Ленинской премии, главного научного сотрудника Математического института АН СССР, профессора МГУ, вице-президента Московского математического общества. Владимир Игоревич — один из самых активных математиков нашего времени с очень широким кругом научных интересов. Предлагаем вашему вниманию его ответы на вопросы нашего корреспондента.

— Как вы стали математиком? Какова роль семьи, школы, математических кружков, олимпиад? Расскажите, пожалуйста, о ваших учителях.

— Я всегда ненавидел зубрежку. Учительница в младших классах говорила поэтому родителям, что такому тупице как я никогда не одолеть таблицу умножения.

Первое математическое потрясение — когда появился настоящий учитель математики, Иван Васильевич Морозкин. Я помню задачу о двух старушках, вышедших одновременно навстречу друг другу, встретившихся в полдень и достигших чужого города — одна в 4 часа пополудни, а другая — в 9. Требовалось узнать, когда они вышли.

Алгебру тогда еще не учили. Придумав «арифметическое» решение (основанное на соображениях размерности или подобия), я впервые испытал ту радость открытия, стремление к которой и сделало меня математиком.

Первая математическая книжка была «Числа и фигуры» Радемахера и Теплица, в 12 лет. В день разбирал несколько страниц. Годом позже мой дядя, техник-буровик Н. Б. Житков, за один вечер рассказал мне, что такое математический анализ. Рассказ кончался определением формы поверхности воды во вращающемся стакане. После этого я сам разыскал и прочел учебник анализа Грэнвиля и Лузина, а затем читал уже без разбора все математические книги в библиотеке рано умершего отца (я — математик в четвертом поколении). Особенно нравились мне «Введение в анализ бесконечно малых» Эйлера (разбиения, производящие функции) и «Курс анализа» Эрмита (комплексный анализ, эллиптические интегралы).

А. А. Ляпунов организовал у себя дома ДНО («добровольное — или детское? — научное общество»). Математика и физика соседствовали здесь с химией и биологией, включая разгромленную только что генетику (сын одного из наших лучших генетиков учился со мной в одном классе и писал тогда в анкете: «мать — домохозяйка, отец — домохозяин»).

В то время *) в Университете процветали математические кружки для школьников 7—10 классов. По воскре-

*) В середине 50-х годов.

сеньям профессора читали для школьников лекции (многие из них изданы в серии «Популярные лекции по математике»). К концу школы мы уже имели довольно ясное представление о достоинствах (и недостатках) большинства лекторов. Школьники чувствовали фальшь и обман острее, чем студенты, так как еще не были приучены делать вид, будто понимают то, чего понять нельзя (нынешние забитые школьники, возможно, утратили это преимущество, да и лекций больше нет).

Руководителями моего кружка были А. П. Савин, Н. Д. Введенская, Т. Д. Вентцель, И. А. Виноградова, известные сейчас математики, все бывшие в то время студентами. Тогдашние кружки давали куда меньше знаний, чем их современные эквиваленты, но зато каждое занятие было праздником. Господствовавший в кружках культ истины, красоты и самостоятельности («ученик — это не мешок, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь») ограничивал количество знаний за счет качества. Именно здесь, в спорах при разборе задач, мы учились полному пониманию и математической строгости. Физика из-за этого отошла в сторону, красота математики ее надолго затмила.

Олимпиады, как и кружки и лекции, организовывались тогда Московским математическим обществом и собирали тысячи участников. Мои успехи росли от «похвального отзыва» в 7 классе до второй премии в 9 и в 10. Эмоциональное значение олимпиад было очень велико, но сейчас я больше помню кружки и лекции. До сих пор ценю прекрасно подобранные книги, полученные в виде наград на олимпиадах: «Наглядную геометрию» Гильберта и Кон-Фоссена, «Что такое математика» Куранта и Роббинса, «Введение в теорию линейных пространств» Шилова, «Теоретическую механику» и «Анализ» Валле-Пуссена с длинным прямоугольным штампом «Победителю Московской математической олимпиады».

— Вы активно занимаетесь математикой более 30 лет. Изменилось ли за это время общественное отношение к математике и математикам?

— Отношение общества (не только в СССР) к фундаментальной науке вообще и к математике в частности описано И. А. Крыловым в басне «Свинья под дубом». В тридцатые и сороковые годы математика пострадала у нас меньше других наук. Как известно, Виет был шифровальщиком и дешифровальщиком у французского короля Генриха IV. С тех пор некоторые области математики поощряются всеми правительствами, и даже Берия заботился о сохранении в стране математической культуры.

За последние 30 лет престиж математики в обществе упал во всех странах. Думаю, что в этом виноваты и сами математики (прежде всего Гильберт и Бурбаки*)), провозгласившие целью своей науки исследование всех следствий произвольных систем аксиом.

— Применимо ли к математике понятие моды?

— Развитие математики напоминает быстрое вращение колеса, брызги с которого летят во все стороны. Мода — это струя, уходящая от основной траектории по касательной. Эти струи эпигонских работ всего заметнее, и в них основная часть массы, но они неизбежно погибают через некоторое время, оторвавшись от колеса. Чтобы остаться на колесе, нужно все время прилагать усилия в направлении, перпендикулярном общему потоку.

— Меняются ли со временем критерии строгости математических рассуждений? Имеют ли отношение к «настоящей» теоретической математике компьютерные эксперименты (например, в теории фрактальных множеств — см. «Квант» № 5 за 1989 г.)? Нужен ли математику-исследователю компьютер? Используете ли вы компьютер в своих исследованиях? В последнее время в популярной литературе много говорится о новой

*) Никола Бурбаки — коллективный псевдоним группы французских математиков, написавших многотомный курс современной математики, в котором последовательно проводится аксиоматический метод.

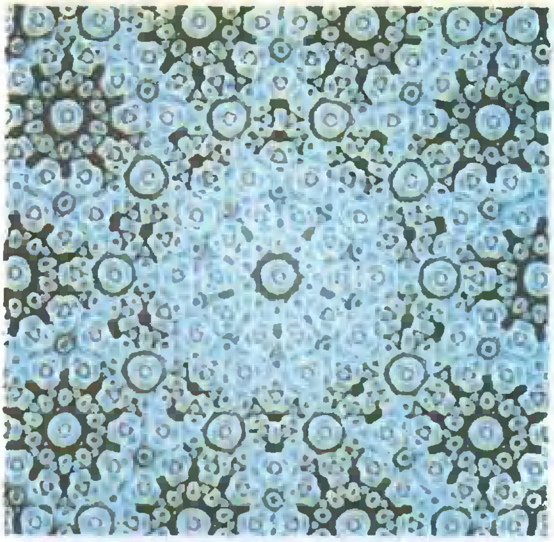


Рис. 1. Траектории различных точек P: замкнутые кривые и стохастическая паутина.

математической дисциплине — «теории катастроф». Что это — новая наука или очередной миф?

— Со времен Евклида критерии математической строгости, сколько мне известно, не менялись.

Компьютер дает огромные возможности для экспериментирования, и я его использую, наряду с логарифмической линейкой и таблицей умножения. Думаю, что без экспериментирования того или иного рода большинство математических результатов не было бы получено. Компьютерные эксперименты добавили кое-что к замечательным работам Жюлиа, Фату и др. об итерациях многочленов. Фрактальные множества — просто термин.

Математику трудно согласиться, что введение нового термина, не подкрепленное новыми теоремами, является существенным прогрессом. Однако успех «кибернетики», «фракталов», «синергетики», «теории катастроф» и «странных аттракторов» показывает плодотворность словотворчества как метода научной работы.

«Трудно поверить,— говорил Пуанкаре,— какую огромную экономию мысли может осуществить одно хорошо подобранное слово. Часто достаточно изобрести одно новое слово, и это слово становится творцом». Оставляя без перевода научные термины («файлы», «интерфейсы»...), мы теряем всю силу этого метода.

Что касается «теории катастроф», то этот термин изобретен для привлечения внимания широкой публики к действительно важным математическим достижениям — к теории особенностей гладких отображений и к теории бифуркаций*) динамических систем. Простейшие выводы теории катастроф (например, что непрерывное движение от плохого установившегося режима к хорошему приводит к ухудшению состояния, что скорость этого ухудшения растет по мере продвижения к лучшему режиму, что сопро-

Рис. 2. Увеличенный фрагмент рисунка 1.

тивление системы изменению режима, вначале незначительное, при этом продвижении также возрастает и что в случае преодоления этого сопротивления система скачком переходит в лучшее состояние, а в противном случае — столь же катастрофически быстро возвращается в плохое состояние) — несомненно верны, но, к сожалению, не спасают от катастроф.

— Математика — важная и очень древняя часть человеческой культуры. Каково ваше мнение о ее месте среди других культурных ценностей?

*) Бифуркация — изменение качественных свойств исследуемого объекта, зависящего от параметра, при изменении этого параметра.

— Слово «Математика» означает наука об истине. Мне кажется, современная наука (т. е. теоретическая физика вместе с математикой) является новой религией — культом истины — основанной Ньютоном триста лет назад.

— Когда вы доказываете теорему, вы ее «создаете» или «открываете»?

— Я, безусловно, испытываю ощущение, что открываю нечто, существовавшее и без меня. Словами А. К. Толстого:

Тщетно, художник, ты мнишь, что творений своих ты создатель,
Вечно носились они над Землею, незримые оку...
Много в пространстве невидимых форм и неслышимых звуков,
Много чудесных в нем есть сочетаний и слова и света.

— Расскажите, пожалуйста, о ваших математических интересах. Есть ли среди ваших математических результатов такие, которые можно было бы объяснить читателям «Кванта»?

— *а*) Д. Гильберт говорил, что по-настоящему хороший математический результат всегда можно растолковать «человеку с улицы». Из одного из моих результатов следует принципиальная невозможность долгосрочного *динамического прогноза* погоды (при сколь угодно мощных компьютерах). Прохожий это, пожалуй, поймет, но стоящую за этим математику объяснять долго.

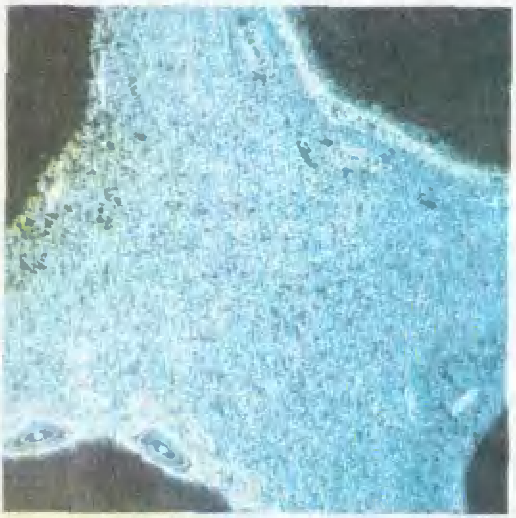


Рис. 3. Тонкая структура детали рисунка 2 (видны отдельные точки траектории и замкнутые кривые).

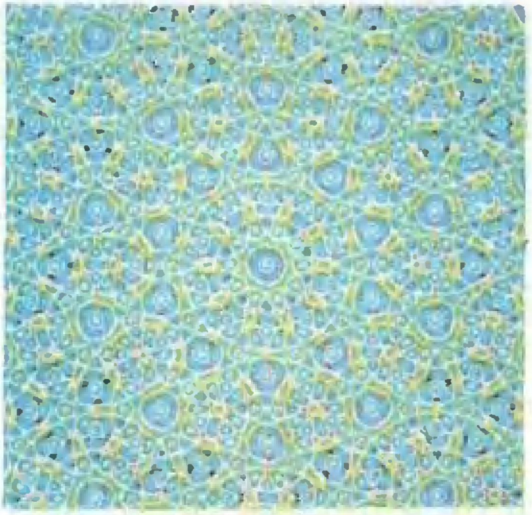


Рис. 4. Квазикристаллическая структура, аппроксимирующая стохастическую паутину рисунка 1.

б) Представим себе заряженную частицу, движущуюся со скоростью v в горизонтальной плоскости под действием вертикального магнитного поля $H(x, y)$. Если величина поля H постоянна, то орбита частицы — окружность, радиус которой равен Cv/H. Предположим теперь, что поле меняется от точки к точке. Тогда каждый виток орбиты будет похож на маленькую *окружность, если начальная скорость* мала. С точки зрения математики, эта орбита — просто плоская кривая, радиус кривизны которой в каждой точке имеет заранее предписанное значение Cv/H.

Поскольку при переменном радиусе витки, вообще говоря, не замкнуты, возникает медленный «дрейф» центра витка. Хотя за один оборот частица смещается незначительно, в течение многих оборотов дрейф накапливается, и частица может уйти далеко.

Куда *именно она уйдет? Этот* вопрос — простейшая модель проблем, встречающихся в разнообразных ситуациях: при исследовании движения заряженных частиц в ускорителях и в магнитных ловушках для удержания плазмы, при анализе влияния возмущений планет друг другом в небесной механике, при изучении устойчивости быстро вращающихся тел в теории гироскопов. В применении к нашей задаче о движении частицы на плоскости результат таков:

Теорема. *Орбита вечно остается в узком кольце между двумя близкими линиями уровня функции H, в предположении, что эти линии уровня замкнуты и что радиус Cv/H достаточно мал.*

Читатели, располагающие компьютером, могут проверить это экспериментально. Эксперимент проще провести с дискретным аналогом той же теории. Рассмотрим отображение $T=AB$ плоскости на себя, где A — поворот на угол $2\pi/q$, а $B(x, y)=(x, y+a\sin x)$ (q — целое число, скажем 5, a — малый параметр, скажем 0,05).

Теорема. *Точки $(P, T^q P, T^{2q} P, ...)$ лежат на гладкой замкнутой кривой для большинства начальных точек P (если параметр a достаточно мал).*

При «нетипичных» P траектория постепенно заполняет красивую неограниченную фигуру, которую Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев и их соавторы назвали *стохастической паутиной*.

Та же математическая теория доказывает и устойчивость колебаний перевернутого вверх ногами маятника, «точка подвеса» которого быстро колеблется в вертикальном направлении (речь идет о нелинейных колебаниях в отсутствие трения). Экспериментальную установку легко сделать на базе вибрационной электробритвы, или электрической швейной машины (П. Л. Капица), или ускорителя с жесткой фокусировкой (А. М. Будкер).

в) Формула для решения квадратного уравнения читателям хорошо известна. Уравнения степеней и 3 и 4 также решаются при помощи радикалов. Уравнения степени 5 уже не решаются в радикалах, но все их можно свести к одному специальному уравнению $f^5+xf+1=0$. Так что ответ выражается через арифметические операции, корни и одну специальную функцию $f(x)$ одной переменной x. Уравнение степени 6 таким же образом сводится к специальной функции двух переменных.

Из функций двух переменных, подставляя одну в другую, можно составить функции любого числа переменных (например, $f(g(x, y), h(z, y))$ — функция трех переменных). Д. Гильберт сформулировал свою 13-ю проблему так: *какие непрерывные функции трех переменных могут быть выражены суперпозициями непрерывных функций двух переменных?* Гильберт предполагал, что не представляется уже функция $f(x, y, z)$, определяемая уравнением $f^7+xf^3+yf^2+zf+1=0$.

Теорема. *Всякая непрерывная функция любого числа переменных представляется суперпозицией непрерывных функций двух переменных.*

Представимость функций большего числа переменных суперпозициями функций трех переменных открыл А. Н. Колмогоров, так что мне оставалось лишь перейти от трех переменных к двум.

Вопрос о представимости суперпозициями, состоящими из алгебраических функций, остается открытым и очень интересен. Ожидается, что «топологическая сложность» ветвления многозначной функции препятствует ее представимости.

г) Читатели «Кванта» знают, конечно, как выглядят кривые, заданные уравнением второй степени: эллипсы, гиперболы и параболы. Как могут выглядеть кривые высших степеней — неизвестно никому. Наибольшее число компонент (овалов), из которых может состоять кривая степени n, равно

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$$

(бесконечно удаленные точки учитываются наравне с обычными, так что гипербола, например, состоит из *одного овала*).

Вопрос о том, каким может быть взаимное расположение этих N овалов на плоскости, составляет часть 16-й проблемы Гильберта. При $n=4$ все $N=4$ овала расположены вне друг друга (почему?). Назовем овалы, находящиеся внутри четного числа других, четными, нечетного — нечетными (все четыре овала кривой четвертой степени четные).

Теорема. *Разность между числом четных и числом нечетных овалов кривой с максимально возможным при данной степени $n=2k$ числом овалов сравнима с k^2 по модулю 8.*

Пример. Из 11 овалов кривой степени 6 внутри других могут лежать либо один, либо 5, либо 9 (почему?). В частности, все 11 овалов не могут лежать вне друг друга.

История этой теоремы такова. Горьковский математик Д. А. Гудков исследовал все расположения овалов кривой степени 6. Он подметил, что указанное сравнение всегда выполнялось в разобранных им примерах, и высказал гипотезу, что оно выполняется всегда. И. Г. Петровский попросил меня проверить работу Гудкова, технически очень сложную. Гипотеза Гудкова меня поразила, так как никакой связи между расположением овалов и арифметикой видно не было. Но я вспомнил, что теоремы делимости на 8 встречаются в четырехмерной топологии. Оказалось, что расположением овалов плоской кривой $f(x, y)=0$ управляет четырехмерное многообразие, образованное комплексными решениями уравнения $f(x, y)=z^2$.

Открытие этой связи проблемы овалов с четырехмерной топологией (а через нее — с арифметикой целочисленных квадратичных форм) позволило доказать гипотезу Гудкова по модулю 4. После этого В. А. Рохлин, ведущий специалист по четырехмерной топологии, доказал гипотезу Гудкова в полном объеме. С тех пор в вещественной алгебраической геометрии получено много замечательных результатов (о некоторых даже рассказывалось в «Кванте»). Однако, каковы всевозможные расположения двадцати двух овалов кривой степени 8 — все еще неизвестно.

Конкретные топологические вопросы этого рода (для многочленов фиксированной степени) сводятся в принципе к конечным алгебраическим вычислениям. Но вычисления эти, по-видимому, превосходят возможности современных компьютеров — во всяком случае, до сих пор ни одного нового результата в этой области с помощью компьютеров не получено.

— Вы много занимаетесь популяризацией математики (пользуясь случаем, еще раз рекомендуем нашим читателям вашу книгу «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук». М.: Наука, 1989). Каково ваше мнение о жанре популяризации; назовите, пожалуйста, достоинства и недостатки этого нелегкого жанра. Читаете ли вы журнал «Квант»? Если да, то выскажите, пожалуйста, мнение о нашем журнале.

— Один из первых популяризаторов — Фарадей — пришел к выводу, что «популярное никогда не бывает поучительным, а поучительное — популярным». Этот эффект Фарадея легко объясним: как заметил Н. Бор (см. статью Р. Пайерлса в «Кванте» № 10 за 1988 год), ясность и истина квантово дополнительны.

Пытающийся преодолеть эту дополнительность «Квант» заслуживает всяческих похвал, но, к сожалению, несколько эклектичен — математическая и физическая части мало согласованы. Рядом с блестящей статьей М. П. Бронштейна о рентгеновских лучах многие современные популяризаторы, увы, выглядят беспомощными. Особенно унылы отделы, посвященные репетиторству и шахматам. Рисункам часто мешает цвет и ненужный, на мой взгляд, отход от традиций энциклопедистов 18 века. Задачи обычно хороши, особенно те, что для младших школьников.

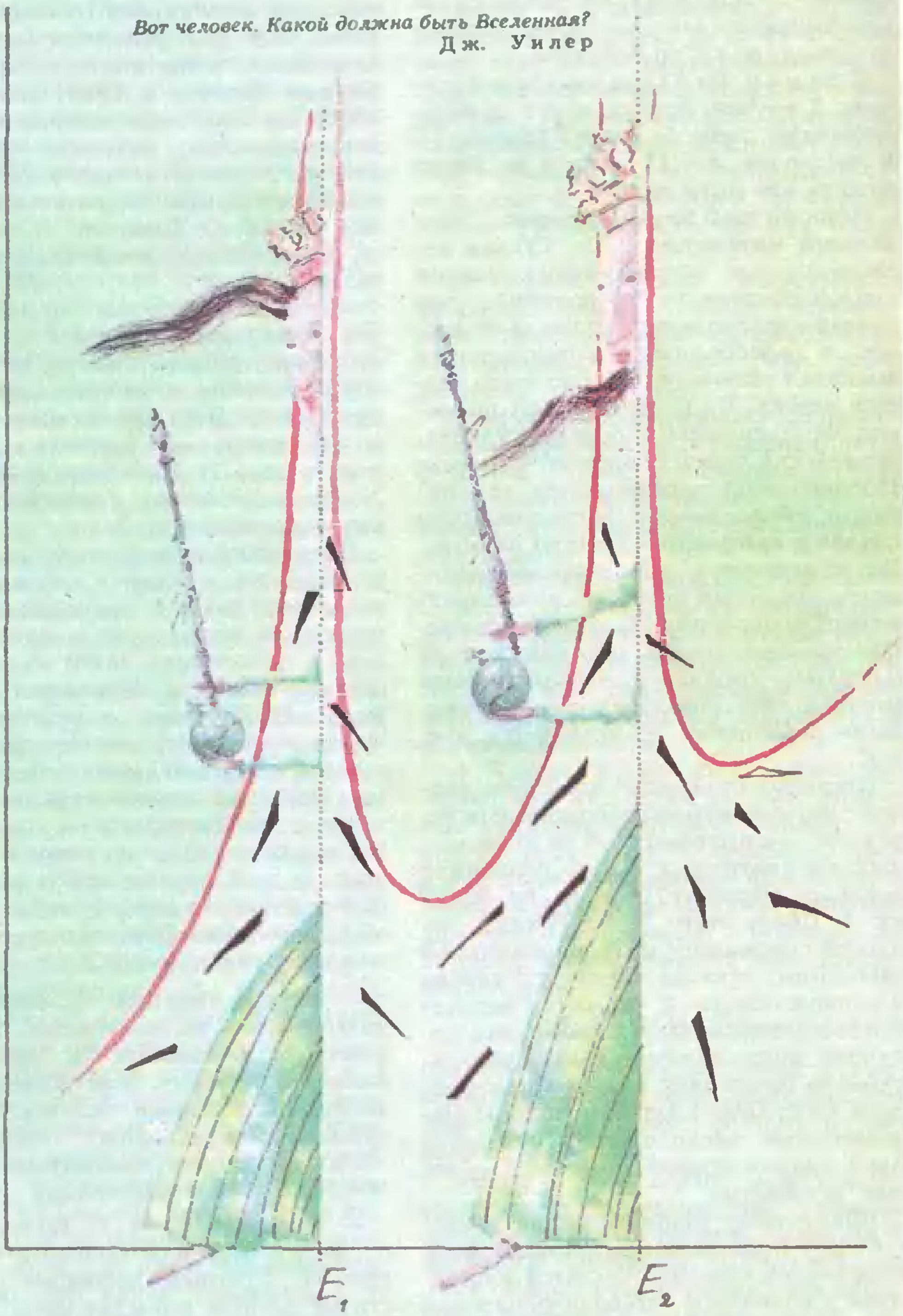
— Многие читатели «Кванта» собираются стать математиками. Существуют ли показания (и противопоказания) к этому, или математиком может быть любой человек, интересующийся предметом? Обязательно ли для будущего математика успешное участие в олимпиадах?

— Рассказывая А. Н. Колмогорову о своем участии в Concours Général (что во Франции примерно соответствует нашим олимпиадам), девяностолетний Адамар все еще волновался и негодовал: он оказался тогда лишь

(Окончание см. на с. 15)

Вращается весь мир вкруг человека...
А. С. Пушкин

Вот человек. Какой должна быть Вселенная?
Дж. Уилер



АНТРОПНЫЙ ПРИНЦИП — ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

А. КУЗИН

Маленькое вступление

Моя статья посвящена попытке науки ответить на один из вечных вопросов. Этот вопрос: значит ли что-нибудь в этом огромном мире маленький человек? Кто он — цель развития Вселенной, венец Творения или что-то случайное, ничем в принципе не отличающееся от остальных процессов природы? Является ли появление человека итогом всего развития Мироздания или же это какой-то случайный поворот? Приспособилась ли жизнь к внешним условиям, которые «и знать о ней ничего не знали», или же сами эти условия приспособлены для появления жизни?

Долгое время наука не располагала фактами для того, чтобы ответить на эти вопросы аргументированно (хотя в неаргументированных ответах не было недостатка). Сведения о мире, которыми располагала наука, были фрагментарны, общая картина развития Вселенной не просматривалась. Но почти четыре столетия организованных усилий ученых дали свои плоды. Теперь мы можем говорить всерьез о научной картине мира, о целостном взгляде на Вселенную. О, мы еще многого не знаем! Поэтому не надо думать, что данный ответ окончателен; это не судебный приговор, по которому человек «осужден» быть венцом Творения. Скептик всегда вправе сослаться на ограниченность научных знаний. Вопросы потому и вечные, что на них нельзя ответить раз и навсегда.

Научная постановка вопроса о мире и человеке

Антропный принцип — дитя мысленного эксперимента. Эксперимент такой: давайте мысленно что-нибудь изменим в законах природы и подумаем — сможет ли человек при этом существовать? При ответе на этот вопрос мы должны, конечно, сосредоточиться на чем-то главном в человеке — ведь ясно, что рассчитывать на его полную неизменность при изменении остального мира не приходится. Пожалуй, мы не ошибемся, если скажем, что два основных качества человека, без которых он и не мыслим как человек,— это разум и свобода. Свобода — способность оставаться самим собой, т. е. не определяться всецело тем, что в данную минуту находится вокруг тебя, а действовать изнутри, из себя. Разум есть условие свободы, поскольку без него невозможен активный отклик на окружающее (в этом смысле разум есть и у животных). Но заниматься вопросами о разуме и свободе в их общей постановке естественные науки не готовы. Нужно найти в этой глобальной проблеме нечто такое, за что они могли бы зацепиться. И вот эта зацепка.

Активно противостоять среде, понимая ее и изменяя сообразно требованиям своего существования, может только сложное существо. Степень сложности можно охарактеризовать количественно, а этим естественные науки и занимаются.

Антропный принцип является ответом на вопрос: всякий ли мыслимый миропорядок предполагает появление прогрессивно усложняющихся структур?

Подчеркну, что возникновение таких структур — только необходимое, а не достаточное условие появления человека. Но уже анализ этого необходимого условия дает нам очень много для понимания процесса эволюции.

Рассмотрим под этим углом зрения эволюцию Вселенной.

Краткий обзор эволюции Вселенной

Согласно современным представлениям Вселенная ограничена во времени и в пространстве, т. е. возраст ее конечен (около 15 млрд. лет), объем — тоже. Количество частиц во Вселенной оценивается учеными колоссальным, но все-таки конечным числом $N \sim 10^{80}$. Вселенная «стартовала» со страшно сжатого и горячего состояния, начальный радиус кривизны был $\sim 10^{-34}$ см. С тех пор Вселенная непрерывно расширяется, как надуваемый воздухом шарик, а «наполняющие» ее галактики, звезды, туманности (материя) удаляются друг от друга, подобно рисункам на шарике. Материя, пространство и время — взаимозависимы; они начались вместе, поэтому вопросы типа «что было до того, как появилась Вселенная?» или «что увидишь, если дойдешь до ее края?», сформулированы неверно. «До того» не было времени, а до пределов Вселенной дойти невозможно, как не дойдешь до пределов Земли.

В первые мгновения после «старта» температура настолько велика, что никаких устойчивых структур образоваться не может. Даже элементарные частицы непрерывно превращаются друг в друга. По мере расширения температура падает и образуются стабильные частицы — электроны, протоны, нейтроны. Это первая структура, и с ее появлением связано первое удивительное обстоятельство. Обстоятельство такое: в первоначальном кипящем котле частиц и античастиц было поровну, а вот при остывании симметрия нарушилась, и число частиц $N_ч$ оказалось бо́льшим, чем число античастиц $N_а$. Поэтому аннигиляция вещества и антивещества не оказалась полной, не вся материя превратилась в свет. Чудесно то, что $(N_ч - N_а)/N_ч \sim 10^{-9}$, т. е. не превратилась в свет лишь одна миллиардная часть частиц (с этим числом мы еще встретимся по другому поводу).

При дальнейшем остывании образуются атомы простейших элементов — водорода и гелия. Для их существования нужен стабильный протон. Как известно, массы протона m_p и нейтрона m_n отличаются мало: $m_n - m_p \approx 2{,}5\ m_e$ (m_e — масса электрона). Более тяжелый нейтрон живет всего 16 минут, распадаясь затем на протон, электрон и электронное антинейтрино:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

Внутри ядер, где плотность ядерной материи и кинетическая энергия частиц велики, идет и обратная реакция. Поэтому внутри ядер нейтроны существуют в состоянии динамического равновесия. Будь нейтрон легче протона, протон стал бы распадаться —

$$p \to e^+ + n + \nu_e$$

(e^+ — позитрон, ν_e — нейтрино), и водорода, который служит главным топливом звезд и основой необходимой для жизни воды, не было бы.

Но пусть образование атомов элементов гарантировано. Заметим, что пока только еще простейших — водорода и гелия. Именно они синтезировались сразу везде, а для синтеза ядер более тяжелых элементов требуются уже специальные условия: для синтеза таких ядер нужны простейшие стабильные ядра как исходный материал и высокие температуры, при которых эти ядра только и могут слиться, причем эти температуры должны держаться продолжительное время (миллиарды лет) — термоядерные реакции идут не быстро. Но не только за миллиарды, а даже за сотни тысяч лет Вселенная уже оказывается в состоянии, весьма напоминающем современное,— средние плотность и температура в ней очень низки. Такие условия благоприятны для существования атомов (ведь при больших температурах электроны не удержатся около ядра), но не годятся для синтеза их ядер.

Итак, условия устойчивости атомов и синтеза ядер несовместимы. Для того чтобы процесс усложнения пошел дальше, необходимо, чтобы Вселенная потеряла пространственную однородность. Это и происходит из-за действия сил гравитации. В газе, заполняющем Вселенную, возникают сгущения — прообразы будущих галактик. Они, в свою очередь, дробятся на еще более мелкие сгущения — протозвезды. (Заметим, что гравитация должна «успеть» сформировать звезды, пока Вселенная еще не слишком расширилась.) По мере уплотнения протозвезды температура в ней растет, пока начавшиеся термоядерные реакции, сопровождающиеся мощным выделением энергии, не остановят сжатия.

Важно, что первые звезды состоят в основном из водорода (пропорция «водород:гелий» в молодой Вселенной равна приблизительно 3:1) — и это именно потому, что, поскольку протоны легче нейтронов, их больше и они не идут все целиком на образование гелия. Гелиевые звезды были бы очень горячими и жили бы недолго, недостаточно долго для того, чтобы на их планетах могла идти биологическая эволюция.

В недрах звезд идут «алхимические» превращения — ядра легких элементов, сталкиваясь, слипаются и превращаются в ядра элементов более тяжелых. И здесь процесс усложнения обусловлен весьма тонкой «подстройкой» сил ядерных и электромагнитных взаимодействий. Без этой подстройки цепочка реакций, ведущая от гелия через углерод и кислород к железу и далее, могла бы оборваться на первых звеньях.

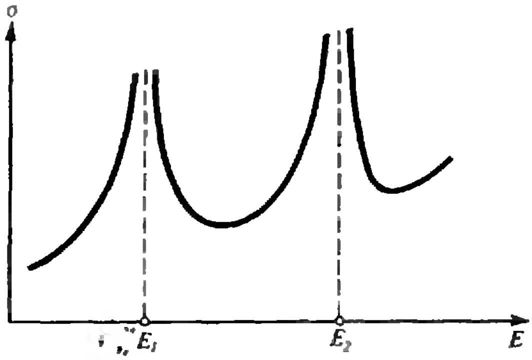
Приведу наиболее разительный пример, поясняющий суть дела. При температурах $T \sim 100$ млн. К в недрах звезд гелий превращается в углерод:

$$3\,{}^{4}\mathrm{He} \to {}^{12}\mathrm{C} + 2\gamma \qquad (1)$$

(значок γ означает гамма-квант). Вероятность встречи трех ядер ^{4}He в разреженной плазме звезды очень мала (время, за которое протекает реакция,— всего 10^{-21} с), и реакция (1) должна идти очень медленно, во всяком случае — недостаточно быстро для того, чтобы образовалось такое количество углерода, которое необходимо для формирования планеты типа Земля.

Но оказывается, что реакция (1) идет в два этапа. На первом этапе два ядра ^{4}He образуют ядро ^{8}Be:

$$2\,{}^{4}\mathrm{He} + (99 \pm 6)\,\text{кэВ} \to {}^{8}\mathrm{Be}. \qquad (2)$$



Указание энергии в скобках *) означает, что без подвода энергии реакция (2) не идет; значит, ^{8}Be выгодно распасться. (Если бы это ядро было стабильным, то «второй» этап, приводящий к образованию ^{12}C, со временем становился бы все менее вероятным — ^{4}He «исчерпывался» бы на образование ^{8}Be.) Не успевшее еще распасться ядро ^{8}Be слипается с ядром ^{4}He:

$${}^{8}\mathrm{Be} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{12}\mathrm{C} + 2\gamma. \qquad (3)$$

Вероятность двуэтапной реакции (2—3) много больше вероятности реакции (1) потому, что ядро ^{8}Be «живет» в 10 000 раз дольше, чем продолжается столкновение ядер гелия. Но не только поэтому. Тут играет роль еще одно удивительное обстоятельство. Скорости ядерных реакций не монотонным образом зависят от энергии E сталкивающихся частиц. Резкое увеличение скорости реакции называют резонансом, а энергии, при которых это происходит (E_1, E_2 на рисунке), называют энергиями резонанса. Эти энергии определяются только структурой ядра-продукта реакции. Так вот, реакция (3) оказывается резонансной: энергия резонанса ядра ^{12}C ($7{,}656 \pm 0{,}008$ МэВ) лишь немного превышает сумму энергий покоя ядер ^{8}Be и ^{4}He (7,3667 МэВ) — этот разрыв преодолевается благодаря высокой температуре в недрах звезды.

Не «прогорит» ли, однако, образовавшийся углерод? Ведь существует и такая реакция:

$${}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{16}\mathrm{O}. \qquad (4)$$

Нет, не прогорит! Реакция (4) ока-

*) Энергия в ядерной физике измеряется в электронвольтах: 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

зывается нерезонансной и идет очень медленно (резонансная энергия ядра ^{16}O равна 7,1187 МэВ, что меньше суммы энергий покоя ядер ^{16}C и ^{4}He (7,1616 МэВ), а высокая температура и, следовательно, большая кинетическая энергия этих ядер только увеличивают «расстройку» резонанса.

Таким образом, благодаря ряду «совпадений» (нестабильность ядра ^{8}Be и вместе с тем сравнительно большой срок его «жизни», резонансный характер реакции (3) и нерезонансный — реакции (4)) цепочка реакций не обрывается, и углерода, столь важного для формирования жизни во Вселенной, получается много.

Когда ядро звезды достаточно обогащается тяжелыми элементами, звезда взрывается с резким увеличением светимости (превращается в сверхновую) и «сбрасывает» большую часть своей массы. Из этого «праха» формируются звезды нового поколения, еще более богатые тяжелыми элементами, и т. д. Космологи установили, что наше Солнце принадлежит к четвертому поколению звезд. Так как возраст Вселенной $\sim$15 млрд. лет, то из этого, казалось бы, следует, что средний срок жизни звездного поколения $\sim$3 млрд. лет. Но этого времени никак не хватит для биоэволюции (возраст Земли $\sim$5 млрд. лет). Значит, наше Солнце принадлежит к довольно редкому типу сравнительно долгоживущих звезд. Большинство звезд живут меньше (срок жизни звезды зависит от ее массы), смысл их существования в том, чтобы обеспечить звезды солнечного типа материалом из тяжелых элементов.

Древние говорили о гармонии сфер: ход космических процессов, представляющийся слаженным и осмысленным философствующему уму, как бы звучит для него, подобно оркестру. И жизнь звезды подобна концерту этого оркестра, где роль оркестрантов играют силы природы, у каждой из которых свой инструмент и своя партия. Виолончель — ядерные силы — и скрипка — электромагнитные — ведут весь концерт; время от времени попискивает флейта — слабые внутриядерные силы; гравитация — контрабас — остается как бы на заднем плане, отсчитывает такт. Концерт заканчивают «слабые» взаимодействия — отложив в сторону флейту и взяв валторну, они играют соло — это стремительный поток нейтрино из ядра взорвавшейся сверхновой уносит прочь внешнюю оболочку звезды.

Итак, таблица Менделеева «сделана». Дальнейший процесс усложнения идет через образование молекул, и неограниченный характер этого процесса обеспечен наличием удивительного элемента углерода. На его основе могут возникать цепи молекул огромной длины. Углерод идеально для этого приспособлен*). Он четырехвалентен и углы между его валентными связями равны $\sim 90^\circ$; атомы углерода, цепляясь друг за друга, как бы образуют строчку, а на оставшиеся две валентности садятся другие атомы и молекулы — возникает что-то вроде «надписи». Весь космический процесс до образования цепей углерода был как бы процессом формирования «букв»; с образованием органических молекул «буквы» — атомы — начинают объединяться в «слова» — молекулы. Но слова — это еще не речь. Между мешаниной «слов»-молекул и осмысленной «речью» живого организма лежит бездна. Однако, прежде чем коснуться вопроса о жизни, я должен сказать несколько слов о неорганической эволюции.

Чем дальше идет процесс усложнения структур, тем жестче требования на условия его протекания. Ядра не распадаются вплоть до температур в миллиарды градусов, атомы не выдерживают даже нескольких тысяч, а у молекул речь идет уже о сотнях градусов. Температура — это мера хаоса, а хаос враждебен структуре. Но процесс организации не может обойтись без хаоса — ведь это именно процесс, ему нужно движение, а именно тепло его и дает. И вот процесс

*) За недостатком места я не могу обсуждать вопрос, почему другие четырехвалентные элементы, например кремний, не так для этого хороши.

зажат между двумя полюсами — жа́ра и холода: перегреться — значит развалиться, переохладиться — значит застыть. На уровне возникновения жизни это общее противоречие процесса усложнения становится настолько острым, что для существования жизни на основе органических молекул остается узенький-узенький интервал температур. Мы не знаем сейчас точно, какой именно — может быть, это всего десяток-другой градусов. То, что такой интервальчик существует, не является чем-то само собой разумеющимся. Это существование обеспечивается очень тонкой «подстройкой» законов природы. Но одной принципиальной возможности здесь мало, нужно еще найти место, где эта возможность становится действительностью. А где найти такое место, где бы на протяжении миллиардов (!) лет поддерживалась температура $+20 \pm 15$ °С, где была бы в свободном состоянии вода (в другой среде органический «бульон» не «сваришь»), не было бы убийственной ультрафиолетовой радиации звезд и т. п.? Здесь уже дело не в законах природы, а в конкретном совпадении. И условия Земли как нельзя лучше подходят для жизни. Но малейшее ее перемещение относительно Солнца уже грозит жизни катастрофой. Если расстояние Земля — Солнце увеличить, то понижение температуры будет лавинообразным: рост полярных шапок увеличит отражательную способность земной поверхности, а это приведет к дальнейшему понижению температуры, и т. д. (возможно, даже до полного оледенения). Напротив, незначительное приближение к Солнцу, небольшое первоначальное повышение температуры также может кончиться значительным ее скачком; условия на Земле станут схожи с венерианскими. Уникальное положение Земли оставляет мало надежд на то, что где-либо в обозримой близости может найтись вторая такая планета.

Обсуждать происхождение жизни и ее эволюцию я не буду, так как это слишком сложный и непонятный предмет, о котором мы мало знаем. Ограничусь лишь следующим замечанием. Гипотеза о происхождении жизни «методом проб и ошибок», т. е. путем случайного перемешивания молекул, должна быть отвергнута по двум причинам. Первая: для обеспечения самовоспроизведения нужно иметь очень много молекул вполне определенного сорта. Даже минимальная живая ячейка уже настолько сложна, что ее правильное устройство осуществляет выбор из $\sim 10^{120}$ вариантов. Вторая причина: жизнь на Земле возникла очень быстро, практически «сразу» после того как планета остыла. (На основании последнего факта В. И. Вернадский считал, что жизнь существует во Вселенной вечно, но такая гипотеза, очевидно, противоречит теории горячей Вселенной.)

Возникновение жизни для нас не ясно, но законы ее развития более-менее познаны. То же самое приходится сказать и о происхождении разума — как и возникновение живого среди неживого, возникновение разумного среди неразумного выглядит чудесным. Здесь, как и при всяком переходе с одной ступеньки сложности на другую, работает одно и то же правило: все более сложное в начале своего появления требует специальных условий, его нужно, так сказать, выпестовать, взлелеять, пока оно еще не вошло в силу. Взрослый человек умнее лошади и может быть более нее приспособленным к изменению условий существования, но грудной младенец, конечно же, более беспомощен, чем она.

«Совпадения», создающие условия для возможности усложнения, могут быть сформулированы на языке математики. Понятие о такой формулировке я постараюсь дать в следующем разделе.

Антропный принцип как система уравнений на физические константы

Математическая формулировка почти каждого закона природы включает в себя некий параметр, который не определяется нами, а принимается как данность. Вот простейший пример: то, что любой заряд кратен заряду электрона, выражается формулой $Q=Ne$ (N — целое число). Здесь параметр — заряд электрона e. Или еще пример: сила притяжения двух масс m_1 и m_2 суть

$$F=G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Здесь параметр — гравитационная постоянная G. Еще пример: энергия фотона пропорциональна его частоте ω: $E=\hbar\omega$. Параметр — постоянная Планка $\hbar$.

Величины типа e, $\hbar$, G, c (скорость света) и т. д. называются в физике мировыми константами. Сами по себе числовые значения этих констант ничего не значат, так как меняются при переходе от одной системы единиц к другой. Но вот их безразмерные комбинации имеют универсальное значение. Например, из e, $\hbar$ и c можно составить единственную безразмерную комбинацию — число $\alpha=e^2/\hbar c\approx\approx 1/137$. Это число называется постоянной тонкой структуры; оно характеризует «силу» электромагнитного взаимодействия. Характерные энергии взаимодействия электронов в атомах и свободных электронов между собой являются лишь малой (порядка α в какой-либо степени) поправкой к их энергии покоя $m_e c^2$. Например, энергия электронов в атоме с атомным номером Z суть

$$E\sim m_e c^2 (Z\alpha)^2.$$

Благодаря малости α процессы, при которых электрон превращается в другие частицы, маловероятны. Малость α обеспечивает устойчивость электрон-протонных структур — атомов, твердых тел. Тяжелые атомы с $Z\gtrsim\alpha^{-1}=137$ неустойчивы: электромагнитное поле у поверхности ядра настолько усиливается, что начинает рождать пары электрон-позитрон, которые экранируют «избыток» заряда ядра, приводят его значение к величине меньшей $e\alpha^{-1}$.

Аналогичные безразмерные константы можно написать и для всех прочих взаимодействий — сильного (S), слабого (W) и гравитационного (G). Для последнего

$$\alpha_G=Gm_p^2/\hbar c\sim 10^{-39}$$

(m_p — масса протона).

Известно, что $\alpha_S\sim 15$, $\alpha_W\sim 10^{-5}$. Оба этих взаимодействия осуществляются только на расстояниях порядка радиуса ядра.

Итак, четыре взаимодействия — четыре свободных параметра α_k ($k\to e$, G, S, W). К ним можно добавить размерность нашего пространства $d=3$, число частиц во Вселенной $N\sim 10^{80}$, отношение числа фотонов к числу частиц $S\sim 10^9$ и отношение масс электрона и протона $m_e/m_p\approx 1/1837$. Последнее число в принципе должно выражаться через α, α_S и α_W, но мы этого делать пока не умеем. Вообще, заветная мечта физиков — вывести все названные числа из какого-то одного числа. Но пока это еще только мечта.

Для того чтобы жизнь была возможна, между свободными параметрами должен выполняться ряд соотношений. Я приведу несколько примеров, просто как иллюстрацию.

Оптимальная скорость расширения Вселенной, при которой успевают образоваться звезды, обеспечивается соотношением

$$N\alpha_G^2\sim 1.$$

Возможность существования звезд типа Солнца — не слишком горячих и не слишком холодных — держится на соотношении

$$\alpha_G\sim\alpha^{12}(m_e/m_p)^4.$$

Чтобы поток нейтрино (они участвуют только в слабых взаимодействиях) мог сбросить оболочку сверхновой звезды, необходимо условие

$$\alpha_W^4\sim\alpha_G(m_p/m_e)^6.$$

Для того чтобы в ходе эволюции Вселенной атомы образовались до того, как успела развиться гравитационная неустойчивость, делающая Вселенную неоднородной, необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$S\sim\alpha^{-2}(m_p/m_e),$$
$$S\leqslant\alpha^{10}(m_p/m_e)\alpha_G^{-1}.$$

Вспомним также о ядерных реакциях в звездах, о которых мы говорили в предыдущем разделе,— описанные там «совпадения» также, в принципе, могли бы быть сформулированы в терминах соотношений мировых констант.

Главным для нас здесь является вот что: число требований (или число уравнений) на константы намного превосходит количество этих констант. Это очень важный факт. Не любая система уравнений, в которой число неизвестных меньше числа уравнений, имеет решение. Для того чтобы решение существовало, нужно, чтобы «лишние» уравнения как-нибудь выражались через остальные.

Значит, в самой структуре законов природы скрыт какой-то очень важный принцип. Мы не знаем пока его математической формулировки (это должна быть, по-видимому, какая-то симметрия уравнений на мировые константы). Такая формулировка выражала бы «идею» Вселенной, основной принцип ее развертывания в пространстве и времени и закон эволюции ее структур. Все, что мы знаем сейчас, это лишь следствия этого принципа. Все частные законы природы объединяет один всеобщий закон: человек должен появиться.

Интервью с В. И. Арнольдом

(Начало см. на с. 2)

вторым, а тот, первый, тоже сделался математиком, но несравненно более слабым.

Некоторые победители олимпиад не делают впоследствии ничего путного, а многие выдающиеся математики вовсе не имели олимпиадных успехов.

Математики сильно различаются своими шкалами времени: некоторые очень хороши в 15-минутных задачах, другие — в часовых, суточных, недельных, требующих месяца размышлений, года, десятилетий... А. Н. Колмогоров считал своим потолком две недели интенсивных размышлений.

Олимпиадный успех во многом зависит от скоростных, спринтерских характеристик, в то время как в серьезной математической деятельности требуется несравненно бо́льшая стайерская выносливость («хорошая теорема,— говорил Б. Н. Делоне — требует не 5, как на олимпиаде, а 5000 часов»).

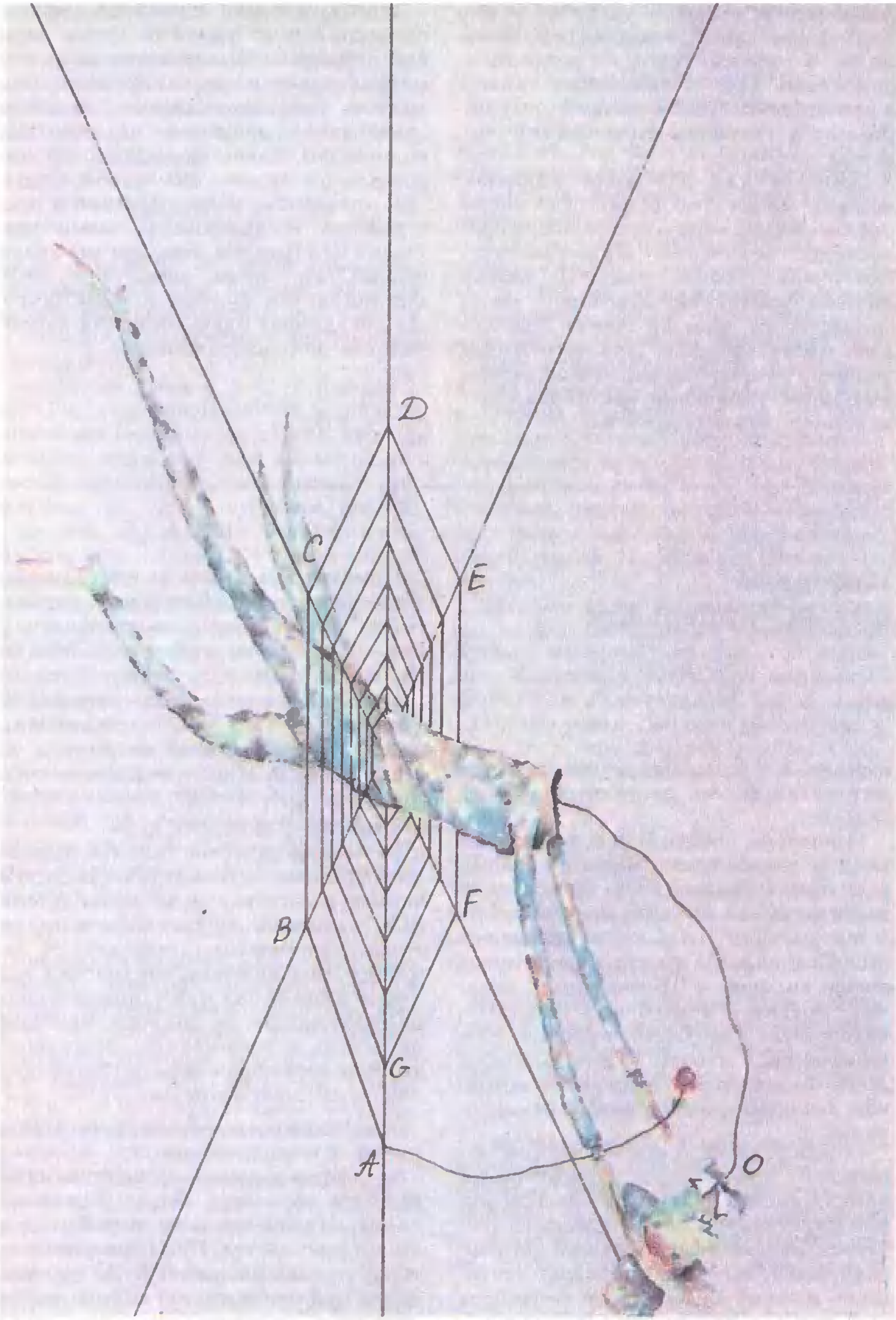
Противопоказания к тому, чтобы стать творчески работающим математиком, есть. Главное противопоказание — отсутствие любви к математике. Кроме того, как сказал поэт,

При каждом деле есть случайный мальчик,
Кому судьба таланта не дала.
И к ним с тупой неласковостью мачех
Относятся любимые дела.

Но математические таланты бывают очень разные — геометрически-интуитивные и алгебраически-вычислительные, логически-дедуктивные и индуктивно-естествоиспытательские. И все нужны. Мне кажется, трудности с таблицей умножения или с определением полуплоскости не должны преграждать путь к математике. Важнейшее условие серьезных занятий математикой — крепкое здоровье.

— Расскажите, пожалуйста, о роли спорта в вашей жизни.

— Когда задача не решается, я становлюсь на лыжи. После сорока километров решение (или хотя бы идея) всегда появляется. При проверке часто обнаруживается ошибка. Но это уже новая трудность, и она преодолевается тем же методом.


D
C
E
F
B
G
A
O

ТЕКСТИЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Как-то так получилось, что творчество ряда немецких математиков 20—30-х годов нашего века оказалось связано с текстильным делом. Эмиль Артин, работая по контракту с текстильной фабрикой, построил одну из самых популярных в современной математике теорию — *теорию кос* (см. статью «Косы и узлы», «Квант» № 2 за 1989 год). Эта статья посвящена другому предмету — *геометрии тканей*, созданной Вильгельмом Бляшке. Геометрия тканей не имеет отношения к реальным тканям — это просто раздел геометрии, связанный множеством нитей с другими областями математики. (Название, тем не менее, вводит в заблуждение; и Бляшке получал приглашения на совещания работников текстильной промышленности. Он даже решил переименовать свое детище в «геометрию сот».)

Определение ткани

В некоторой области на плоскости задана *ткань из d нитей* (или, попросту, *d-ткань*), если в этой области заданы d семейств попарно не касающихся кривых и через каждую точку области проходит ровно по одной кривой из каждого семейства. Кривые каждого из семейств называются нитями ткани. Две ткани считаются одинаковыми, если одну можно превратить в другую с помощью произвольной деформации (запрещаются только разрывы и склейки). Примеры 1 и 2-тканей изображены на рисунках 1 и 2. (Нити разных семейств изображаются разными цветами.)

Приступим к изучению d-тканей. При $d=1$ исследовать нечего: подходящая деформация мгновенно превращает 1-ткань в семейство параллельных прямых (см. рис. 1). Не лучше обстоит дело и с 2-тканью. После выпрямления первого семейства кривых у нас остается возможность двигать каждую точку вдоль проходящей через нее прямой нити. Этого достаточно, чтобы выпрямить и второе семейство (см. рис. 2), поэтому все 2-ткани тоже устроены одинаково. Содержательная теория начинается со случая 3-тканей.

Несколько примеров

0°. Простейший пример — это три семейства параллельных прямых (рис. 3). Такую, а также всякую получающуюся из нее деформацией

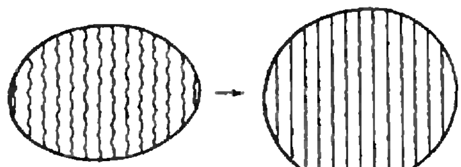


Рис. 1.

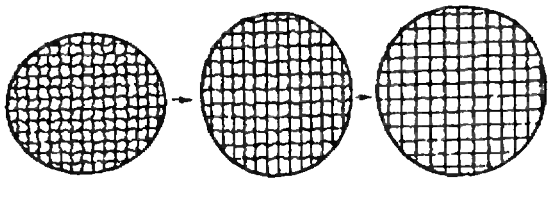


Рис. 2.

3-ткань, мы будем называть тривиальной. Три семейства прямых на рисунке 3 можно задать уравнениями

$$x=\text{const},\quad y=\text{const},\quad -(x+y)=\text{const},$$

(каждой константе отвечает своя прямая). И вообще «достаточно хорошее» уравнение $f(x, y)=\text{const}$ задает на плоскости семейство кривых. 3-ткань можно задать тремя функциями:

$$f(x, y)=\text{const},\ g(x, y)=\text{const},\ h(x, y)=\text{const}.$$

Теорема. *Если эти функции удовлетворяют уравнению*

$$f(x, y)+g(x, y)+h(x, y)=0, \qquad (1)$$

то соответствующая 3-ткань тривиальна.

Доказательство. Рассмотрим деформацию, которая переводит точку с координатами (x, y) в точку $(x', y')=(f(x, y), g(x, y))$. Эта деформация превращает семейство кривых $f=\text{const}$ и $g=\text{const}$ в семейство вертикальных и горизонтальных прямых $x'=\text{const}$ и $y'=\text{const}$. В силу уравнения (1), третье семейство кривых выпрямится автоматически, так как будет задаваться уравнением $x'+y'=\text{const}$.

1°. Рассмотрим 3-ткань строго внутри треугольника ABC, составленную из окружностей. Окружности каждого из трех семейств проходят через две из трех вершин треугольника (рис. 4, *а*). Положение точки M внутри треугольника задается тремя углами α, β, γ, под которыми из M видны стороны треугольника (рис. 4, *б*). Окружности каждого семейства задаются условиями:

$$\alpha=\text{const},\ \beta=\text{const} \text{ и } \gamma=\text{const},$$

так как вписанный угол, опирающийся на фиксированную хорду, имеет постоянное значение. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, для функций

$$f(M)=\alpha-2\pi/3,\ g(M)=\beta-2\pi/3,\ h(M)=\gamma-2\pi/3$$

выполнено уравнение (1). Следовательно, ткань тривиальна (хотя совсем и не похожа на ткань на рисунке 3).

2°. Следующий пример — ткань, строго внутри первого координатного угла, состоящая из трех семейств прямых линий. Первые два семейства состоят из вертикальных и горизонтальных прямых, а третье — из прямых, проходящих через начало координат (рис. 5). Последнее семейство задается условием

$$y/x=\text{const};$$

поэтому его можно задать и уравнением

$$h(x, y)=\ln(y/x)=\ln y-\ln x=\text{const}.$$

Если задать первые два семейства условиями

$$f(x, y)=\ln x=\text{const} \text{ и } g(x, y)=-\ln(y)=\text{const},$$

то будет выполнено уравнение (1). Следовательно, ткань тривиальна.

3°. Более интересный пример изображен на рисунке 6. На этот раз ткань состоит из трех пучков прямых, проходящих через три вершины треугольника ABC. Эту ткань можно превратить в ткань из предыдущего примера. Для этого приподнимем плоскость и осветим ее точечным источником света O так, как изображено на рисунке 7. Тень, которая возникает на экра-

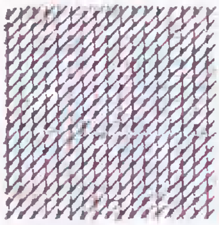
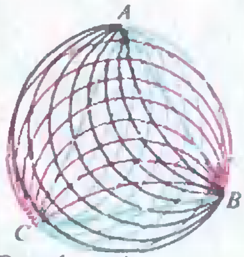


Рис. 3.



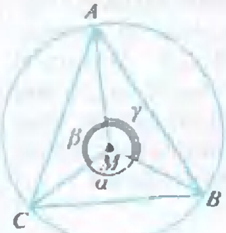


Рис. 4. а) б)

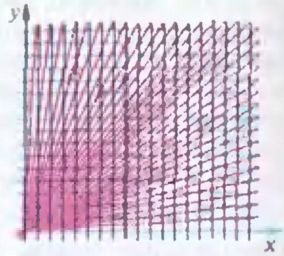


Рис. 5.

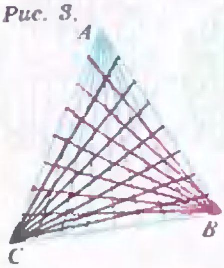


Рис. 6.

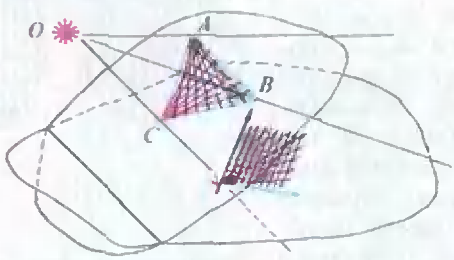


Рис. 7.

Рис. 8.

не, параллельном плоскости OAB, будет совпадать с тканью из примера 2°. Поэтому ткань на рисунке 6 тоже тривиальна.

4°. В двух предыдущих примерах мы имели дело с прямолинейными тканями, т. е. с тканями, составленными из прямых. Вот общий способ построения таких тканей. Возьмем три кривые на плоскости и пусть A — такая точка, из которой можно провести касательную к каждой кривой. Тогда из точек, достаточно близких к A, тоже можно провести касательные ко всем трем кривым. Эти касательные и образуют в окрестности точки прямолинейную ткань (рис. 8).

Я назвал этот способ построения прямолинейной ткани общим. И вот почему. Семейство прямых, не проходящих через одну точку и не параллельных между собой, касается некоторой кривой — *огибающей* семейства. Значит, каждое общее семейство прямых состоит из касательных к некоторой кривой. Прямолинейная 3-ткань — это 3 семейства прямых, заданные своими огибающими. Как вы увидите, такая ткань, как правило, оказывается нетривиальной.

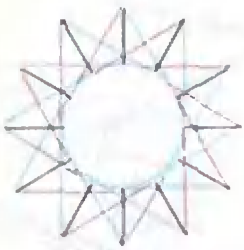


Рис. 9.

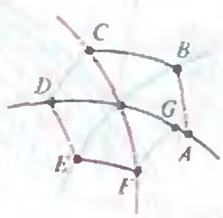


Рис. 10.

Рис. 11.

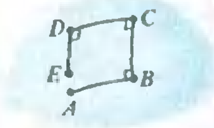


Рис. 12.

Упражнения

Докажите тривиальность 3-ткани:

1. составленной из касательных к данной окружности и прямых, проходящих через ее центр (рис. 9);
2. составленной в окрестности точки (1; 1) из вертикальных и горизонтальных прямых и гипербол $xy=\text{const}$.

Шестиугольные ткани

Все рассмотренные до сих пор ткани были тривиальными. И у вас даже могло создаться впечатление, что других тканей вообще не бывает. В действительности, тривиальность 3-ткани — это, скорее, «несчастный случай», чем общее правило: случайно взятая ткань будет нетривиальной. Но как доказать нетривиальность какой-либо ткани? Для этого хорошо бы придумать величину, обращающуюся в ноль, если ткань тривиальна, и отличную от нуля в противном случае.

Проведем через точку O три нити ткани. На одной из них выберем точку A (рис. 10) и проведем через нее нить второго семейства, до пересечения в точке B с нитью третьего семейства, проходящей через O. Через B проведем нить первого семейства до пересечения в точке C с нитью второго семейства, проходящей через O. И так далее. Мы построим точки D, E, F и G; причем для ткани на рисунке 3, а значит, и для любой тривиальной ткани, точки A и G совпадают. Для произвольной же 3-ткани это вовсе не обязательно.

Незамкнутость шестиугольника $ABCDEFG$ — это *препятствие* к тривиальности ткани. Предлагаю вам вооружиться циркулем и линейкой и проверить, что для ткани, составленной из касательных к двум концентрическим окружностям и прямых, проходящих через их общий центр, шестиугольные фигуры не замыкаются (рис. 11). Значит, эта ткань нетривиальна.

Степень незамкнутости шестиугольника, т. е. расстояние между точками A и G, измеряет отличие 3-ткани от тривиальной. Аналогично обстоит дело в дифференциальной геометрии, где степень искривленности поверхности можно измерять так: пройдем кратчайшим путем из точки A в точку B, удаленную от A на расстояние ε; повернем на 90°; еще раз пройдем расстояние ε — попадем в точку C;

еще раз повернем на 90°; и так — еще два раза. Точка E, в которую мы в итоге попадем, не обязательно совпадет с A и отстоит от нее тем дальше, чем больше кривизна поверхности (рис. 12).

Ткань называется *шестиугольной*, если для любых исходных точек O и A шестиугольник на рисунке 10 замыкается. Шестиугольность не только необходима, но и достаточна для тривиальности ткани. Идея доказательства: достроим шестиугольник до треугольных «сот» (рис. 13). Эти соты можно превратить деформацией в три набора параллельных прямых. Устремляя размеры исходного шестиугольника к нулю, мы в пределе получаем деформацию шестиугольной ткани в ткань, составленную из параллельных линий.

Упражнения

3. Рассмотрим треугольник, составленный из кривых 3-ткани. Докажите, что существует единственный вписанный в него треугольник, тоже составленный из кривых ткани (рис. 14).

4. Рассмотрим два треугольника с общей стороной и впишем в каждый из них по треугольнику (рис. 15). Обязательно ли их вершины, лежащие на общей стороне, совпадают?

5. Ткань составлена из вертикальных и горизонтальных прямых и графиков $y=f(x)+$ $+\text{const}$, где $f(x)$ — некоторая функция (рис. 16). Докажите, что эта ткань шестиугольная.

6. Проверьте с помощью циркуля и линейки, что 3-ткань, составленная из прямых, проходящих через две данные точки, и касательных к некоторой окружности, нетривиальна (рис. 17).

Отступление: конфигурация Паппа

Я обещал показать вам, как геометрия тканей связана с другими разделами математики. В этом и следующем пункте мы поговорим о ее взаимоотношениях с проективной и алгебраической геометрией.

Возьмите линейку и проведите две прямые. На каждой из них отметьте по 3 точки: A, B, C и D, E, F (рис. 18). Теперь соедините пары точек: AE, AF, BD, BF, CD, CE. На чертеже возникнут три новые точки: K, L и M. А сейчас — внимание: приложите к этим точкам линейку и вы увидите, что *они лежат на одной прямой*. Это утверждение — знаменитая *теорема Паппа*, а конфигурация, изображенная на рисунке 18, называется *конфигурацией Паппа.*

Я не буду доказывать теорему Паппа. Не потому, что это слишком трудно, а потому, что это увело бы нас далеко от основного сюжета статьи. Доказательство этой теоремы, а также других утверждений этого пункта вы можете прочитать в статье «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» в «Кванте» № 8 за 1987 год. Советую вам ознакомиться с этой очень содержательной статьей — ее тема тесно связана с геометрией прямолинейных *тканей.*

Теорема Паппа допускает обобщение, относящееся к алгебраической геометрии — разделу математики, исследующему геометрические образы с помощью задающих их уравнений. Рассмотрим *кубическую кривую*, т. е. кривую, заданную в координатах

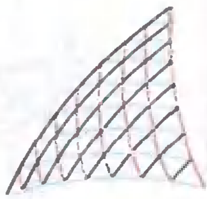


Рис. 13.

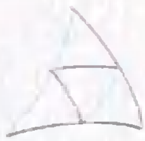


Рис. 14.

Рис. 15.

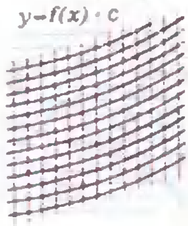


Рис. 16.

(x, y) уравнением третьей степени:

$$ax^3+bx^2y+\ldots+l=0$$

(всего 10 членов). Нужное нам свойство этой кривой состоит в следующем:

если кубическая кривая проходит через 8 из 9 точек конфигурации Паппа, то она проходит и через ее 9-ю точку (рис. 19).

Доказательство вы сможете прочитать в упомянутой выше статье. Теорема Паппа является частным случаем сформулированного утверждения. Действительно, в ней речь идет о трех прямых, каждую из которых можно задать своим линейным уравнением. Объединение прямых задается произведением этих уравнений, т. е. уравнением третьей степени. Значит, объединение трех прямых — частный случай кубической кривой.

Прямолинейные ткани и кубические кривые

Сейчас мы опишем все шестиугольные 3-ткани, составленные из прямых. Невертикальную прямую на плоскости с координатами (x, y) можно задать уравнением

$$y=px+q. \qquad (2)$$

Рассмотрим вспомогательную плоскость с координатами (p, q). Каждой

Возьмем какую-нибудь точку и рассмотрим *прямолинейную* 3-ткань в ее окрестности. 3-ткань — это 3 семейства прямых, каждое из которых зависит *от одного параметра*. Прямой одного семейства отвечает точка (p, q)-плоскости, а все вместе они образуют в этой *плоскости кривую*. Трем семействам нитей ткани отвечают три кривые в (p, q)-плоскости. Посмотрим, какая фигура *отвечает шестиугольнику*, составленному из нитей ткани. На рисунке 20, *а* изображена исходная, а на *рисунке 20, б — вспомогательная* (p, q)-плоскость. Каждой прямой на левом рисунке отвечает точка на правом, *обозначенная той же парой* букв; а каждой точке — прямая. Если какая-либо точка слева лежит на какой-либо прямой, *то справа* — все наоборот: соответствующая прямая содержит соответствующую точку. Это

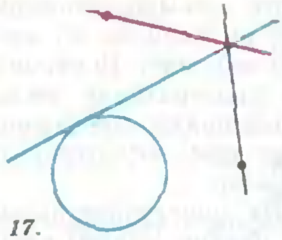


Рис. 17.

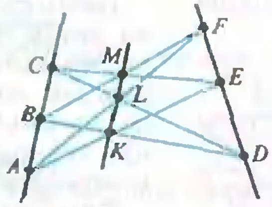


Рис. 18.

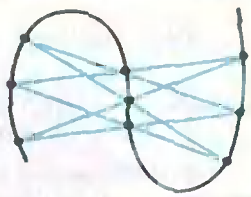


Рис. 19.

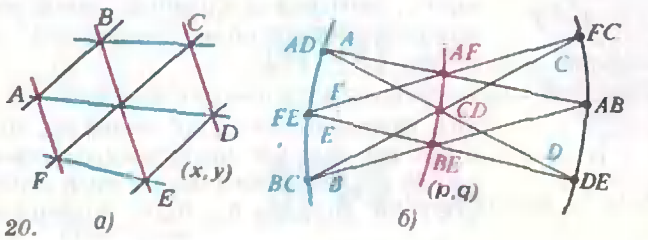


Рис. 20.

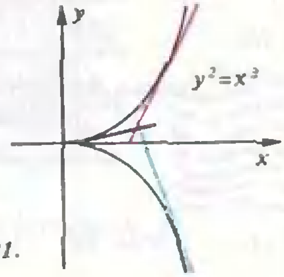


Рис. 21.

ее точке *отвечает прямая* исходной плоскости (x, y), заданная уравнением (2). Зафиксируем точку (x, y). Пучок проходящих *через нее прямых* задается тем же уравнением (2). Это линейное относительно p и q уравнение определяет на *вспомогательной* плоскости прямую; так что пучок прямых, проходящих через точку исходной плоскости, изображается в (p, q)-координатах прямой. (Подробнее об этом см. в статье «Геометрия уравнений», «Квант», № 10 за 1988 год.)

и означает, что фигура на рисунке 20, *б* отвечает шестиугольнику на рисунке 20, *а*.

«Позвольте,— скажете вы, — ведь на рисунке 20, *б* изображена конфигурация Паппа!» Вы совершенно правы. И из основной теоремы предыдущего пункта следует, что прямолинейная ткань будет шестиугольной, если три отвечающие ей кривые на рисунке 20, *б* являются частями одной кубической кривой. То есть, если коэффициенты p и q уравнений прямых $y=$

$=px+q$, из которых составлена ткань, удовлетворяют некоторому уравнению 3-й степени. Более того, других шестиугольных тканей, «сотканных» из прямых, нет (но этого мы доказывать не будем).

Упражнения

7. Докажите, что ткани на рисунке 6 отвечает в (p, q)-плоскости конфигурация, изображенная на рисунке 18,и, следовательно, из тривиальности этой ткани следует теорема Паппа.

8. Докажите шестиугольность ткани, составленной из троек касательных к полукубической параболе $y^2=x^3$ (рис. 21).

9. Докажите, что ткани на рисунке 9 отвечает в (p, q)-плоскости кубическая кривая.

Ткань в пространстве

Всякая 2-ткань на плоскости тривиальна. А в пространстве дело обстоит совершенно иначе. Говорят, что в трехмерной области задана 2-ткань, если эта область двумя способами представлена в виде объединения попарно не касающихся кривых (боюсь, что это мало напоминает ткань — вспоминается скорее железная арматура в куске бетона). Тривиальная 2-ткань — это просто два семейства прямых, параллельных осям Ox и Oy.

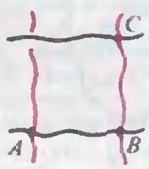


Рис. 22.

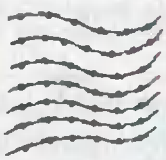


Рис. 24.

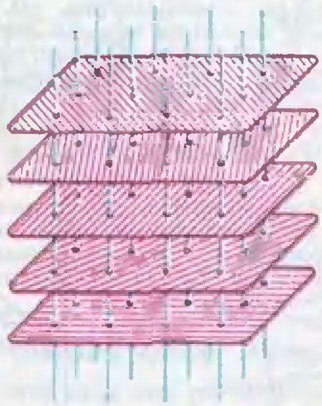


Рис. 23.

Препятствие к тривиальности пространственной ткани построить еще проще, чем на плоскости. Возьмем произвольную точку A, проведем через нее кривую первого семейства и выберем на ней точку B. Через B проведем кривую второго семейства и возьмем на ней точку C. Теперь проведем через C кривую первого, а через A — второго семейства (рис. 22). Пересекутся ли эти кривые? В тривиальной ткани — да, а в произвольной — вовсе не обязательно.

Пример нетривиальной 2-ткани строится так. Первое семейство состоит из вертикальных прямых, а второе — из горизонтальных. Прямые, лежащие в горизонтальной плоскости $z=c$, параллельны между собой и составляют с фиксированным горизонтальным направлением угол в c радиан (рис. 23). Чтобы построить такую ткань, нужно передвигать горизонтальную плоскость с нанесенными на ней параллельными прямыми вдоль вертикальной оси, поворачивая ее с постоянной скоростью. Что эта ткань нетривиальна, т. е. ни один четырехугольник на рисунке 22 для нее не замыкается, предлагаю вам убедиться самостоятельно.

Незамкнутость четырехугольников из нитей ткани на рисунке 23 влечет неожиданное следствие. Построим в каждой точке пространства маленькую плоскую площадку, содержащую две проходящие через эту точку нити построенной ткани.

Теорема. *Не существует никакой (даже сколь угодно малой) поверхности, которая в каждой своей точке касалась бы соответствующей площадки.*

Доказательство. Если бы такая поверхность существовала, то достаточно малый четырехугольник из нитей ткани лежал бы на этой поверхности и должен бы быть замкнутым.

Итак, в пространстве существует поле плоскостей, для которого нет ни одной касающейся его поверхности. Этот неожиданный факт противоречит интуиции, выработанной при работе с плоскостью: на плоскости для любого поля направлений существуют касающиеся его кривые (рис. 24). Поля плоскостей, для которых не существует касательных поверхностей, называются *контактными структурами* и являются очень популярным предметом исследований в современной математике.

СЕТИ ЧЕБЫШЕВА

Ю. КОТОВ,
кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Вам, вероятно, приходилось примерять карнавальные костюмы, сделанные из бумаги. И вы замечали, что такие костюмы плохо сидят, носить их неудобно. Причина — в том, что лист бумаги нерастяжим и не способен плотно прилегать к искривленной поверхности (см. статью «Геометрия листа бумаги» в «Кванте» № 9 за 1988 год). Зато ткань прекрасно облегает выпуклости и вогнутости человеческого тела. Как же устроена ткань?

Она соткана из двух практически нерастяжимых нитей, образующих прямоугольную решетку (рис. 1). Если прижать кусочек ткани к искривленной поверхности, то составляющие ее прямоугольники искажаются, превращаясь в параллелограммы (рис. 2 и 3). Деформацию ткани можно произвести и не выходя из плоскости — для этого достаточно растянуть кусочек ткани по диагонали.

Математики любят точные определения; дадим их и мы.

Сеть Чебышева *) — это два семейства попарно не касающихся линий на поверхности; при этом через каждую точку поверхности проходит ровно по одной линии каждого семейства и длины сторон каждого криволинейного четырехугольника, образованного кривыми, равны (рис. 4). Последнее означает, что линии, составляющие сеть, нерастяжимы.

Простейший пример — это сеть на плоскости, образованная двумя семействами параллельных прямых (ячейки такой сети — параллелограммы). Более содержательный пример плоской сети Чебышева строится так. Возьмем две кривые m и n, пересекающиеся в точке O. Для каждой точки A, лежащей на кривой n, сделаем параллельный перенос кривой m на вектор OA. Аналогично, для каждой точки B на кривой m перенесем кривую n на вектор OB (рис. 5).

В результате получится некоторая сеть; и мы утверждаем, что это — сеть Чебышева. Действительно, из рисунка 5 следует, что $OBCA$ — параллелограмм. Поэтому дуга AC кривой m' получается из дуги OB кривой m параллельным переносом на вектор OA и имеет с ней равную длину. Аналогично — для дуг OA и BC. То же соображение применимо к произвольной ячейке построенной сети.

Итак, две кривые на плоскости, пересекающиеся под ненулевым углом, достраиваются в некоторой окрестности их точки пересечения до сети Чебышева. Кроме того, касательные к кривым одного семейства,

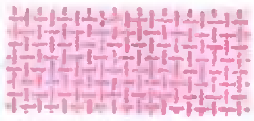


Рис. 1.

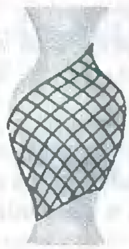


Рис. 2.

Рис. 3.

*) Это понятие ввел знаменитый русский математик П. Л. Чебышев. О его творчестве «Квант» уже рассказывал в этом году: см. статьи «О постулате Бертрана» — в № 1, «Инверсоры» — в № 4, «Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля» и «Задача Чебышева и тригонометрические многочлены» — в № 6. Сеть Чебышева — математическая модель ткани, сотканной из *конечного* числа нитей.

проведенные в точках их пересечения с любой кривой другого семейства, *параллельны*. Это прямо следует из построения.

Описанная конструкция нуждается в дополнении: по двум кривым m и n сеть Чебышева *строится единственным* образом. Для доказательства мы еще раз построим эту сеть, но на этот раз способом, исключающим произвол.

Приблизим исходные кривые ломаными со звеньями длиной ε (рис. 6, *а*) и попробуем достроить их до сети Чебышева. Ячейки сети Чебышева с прямолинейными сторонами — параллелограммы, поэтому ломаные на рисунке 6, *а* однозначно достраиваются до «сот», состоящих из параллелограммов со стороной ε (рис. 6, *б*). Устремляя ε к нулю, мы

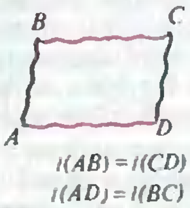


Рис. 4.

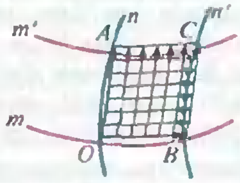


Рис. 5.

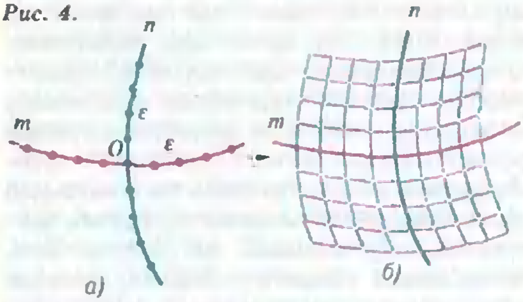


Рис. 6.

в пределе получим сеть Чебышева, содержащую кривые m и n. Конечно, следовало бы сказать что-то о существовании и единственности предела. Доказывать это было бы скучновато; мы надеемся, что рисунок 6, *б* и так выглядит достаточно убедительно.

Сети Чебышева на «кривой» поверхности обладают теми же свойствами, что на плоскости: каждые две пересекающиеся кривые однозначно достраиваются «в малом» до сети Чебышева. (Хотите знать, как это доказывается? Конструкцией, аналогичной изображенной на рисунке 6 — продумайте детали!) Сохраняет силу и вывод о параллельности касательных к одному семейству линий вдоль кривой другого семейства — только слово «параллельность» нужно понимать так, как это принято в дифференциальной геометрии (об этом рассказано в статье «О кривизне» в «Кванте» № 5 за 1989 год). Мы не будем входить в детали; вместо этого предлагаем вам конструкцию искривленной поверхности вместе с сетью Чебышева на ней.

Строится она так. Возьмем в пространстве две кривые m и n и для каждой пары точек $A \in m$ и $B \in n$ отметим *середину* C отрезка AB (рис. 7) Когда точки A и B пробегают кривые m и n, точка C заметает некоторую поверх-

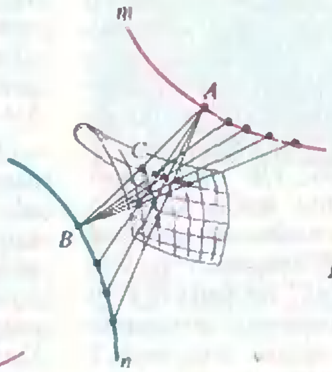


Рис. 7.

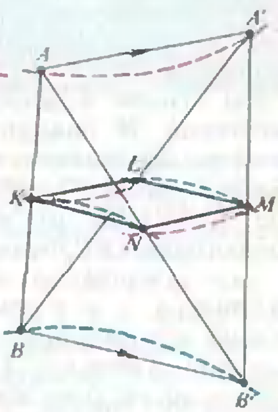


Рис. 8.

ность. На этой поверхности отмечены два семейства линий, которые получаются, если в описанной конструкции *зафиксировать одну из точек* — A или B. Мы утверждаем, что эти два семейства образуют сеть Чебышева.

Действительно, пусть точки A и A' — *лежат на кривой* m, *а* B *и* B' — на кривой n (рис. 8). Середины соответствующих отрезков — точки K, L,

(Окончание см. на с. 47)

ПОЧЕМУ ЧЕЛОВЕК НЕ СТАЛ ВЕЛИКАНОМ

Д. СИГАЛОВСКИЙ

Кто из нас в детстве не читал о Гулливере, о его приключениях сперва в королевстве Лилипутия, а затем в королевстве Бробдингнег. В Лилипутии все предметы, звери, растения были совершенно такими же, как в нашем мире, но в двенадцать раз меньше. Зато в королевстве Бробдингнег все было в двенадцать раз больше, чем в привычном нам мире. Жизнь в обоих королевствах протекала так же, как в нашем мире в восемнадцатом веке, когда Джонатан Свифт писал свое «Путешествие Гулливера». А как вы думаете, могут ли в земных условиях существовать на самом деле Лилипутия и Бробдингнег? Почему человек не стал великаном?

Мы живем в мире, где действует тяготение. И размеры всего живого (и не только живого) на Земле так или иначе связаны с тяготением. А как оно сказалось бы на лилипутах и бробдингнегах? Физическое строение у них совершенно такое же, как у Гулливера, т. е. у обычного человека, только все линейные размеры у первых уменьшены в 12 раз, а у вторых — во столько же раз увеличены. Вес тела пропорционален его объему, поэтому вес великана из книги Свифта будет в $12^3 \approx 1700$ раз больше веса Гулливера, а вес лилипута — во столько же раз меньше. Значит, если обычный человек весит, скажем, 600 Н, то великан будет весить около 1 000 000 Н. Какой же скелет выдержит такой вес?

Это зависит от прочности костей. Прочность пропорциональна площади поперечного сечения, т. е. квадрату линейных размеров. Так что при прочих равных условиях кости великана будут только в 144 раза прочней костей человека, и поэтому на каждую кость будет приходиться нагрузка в 12 раз бóльшая, чем у человека. (Представляете, как бы вы себя чувствовали, если бы на плечах у вас сидело 11 человек!) Это, кстати, понимал еще Галилей. Вот что он писал: «Если бы кто-нибудь пожелал сохранить в громадном великане те же пропорции конечностей, что и у обычного человека, то он должен был бы подыскать более твердый и более прочный материал для костей или согласиться на меньшую крепость великана по сравнению с человеком среднего роста; если бы великан был необыкновенно большой высоты, то он бы упал и был бы раздавлен собственной тяжестью».

Теперь вы понимаете, почему на суше нет животных крупнее слона? А вот в океане живут и гораздо более крупные животные. В среде, где тяготение хотя бы частично компенсируется действием других сил, животные достигают огромных размеров. Поэтому в океане и развились такие гигантские млекопитающие, как китообразные, масса которых во много раз превышает массу самых крупных животных, обитающих на суше. Так, масса слона достигает 6 тонн, а масса кита может достигать и 100 тонн. Кстати, если сравнить кости близких по строению животных разных размеров, например льва и кошки, то окажется, что кости льва отнюдь не являются увеличенной копией костей кошки. В них нарушен масштаб изменений, они гораздо толще, чем полагалось бы при их длине.

Размер любых сооружений на Земле также ограничен прочностью применяемых материалов. Вес конструкции не должен превышать некоторой предельной величины, иначе она будет раздавлена собственным весом.

А вот в космосе нагрузка, которую испытывают конструкционные материалы, будет определяться уже не действием гравитационного поля Земли, а действием сил тяготения между частями конструкции. Если части эти очень велики и массивны, то при расчетах нужно учитывать силы тяготения между ними.

Итак, мы пришли к выводу, что существование великанов невозможно и причиной этого является тяготение. Но у лилипутов с точки зрения прочности скелета все обстоит благополучно; более того, у них даже имеется двенадцатикратный запас прочности. Выходит, чем меньше живое существо, тем оно прочнее. Почему же не существует теплокровных животных меньших, чем землеройка?

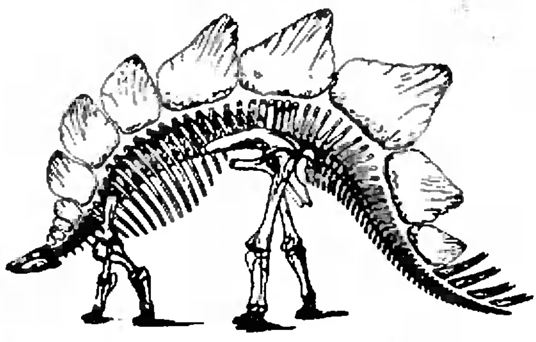
Именно потому, что они теплокровные. Теплокровное животное, в том числе человека, нельзя рассматривать как чисто механическую систему. При довольно значительных колебаниях температуры внешней среды теплокровные практически сохраняют постоянную температуру тела (за исключением состояния анабиоза, в которое в зимнее время впадают некоторые животные, например медведи). Постоянство температуры тела является важнейшим условием существования высокоорганизованной жизни. Мы все время излучаем тепло, теряем его при выдыхании нагретого в легких воздуха, за счет испарения влаги с поверхности тела, расходуем на совершение работы. Потерянную энергию мы восполняем пищей. Экспериментально установлено, что по отношению к живым организмам полностью справедливо первое начало термодинамики, иначе говоря — закон сохранения энергии. В теле животного при окислении пищевых продуктов освобождается такое же количество энергии, как и при простом сжигании этих продуктов до тех же конечных веществ вне организма. Только около трети химической энергии переваренной нами пищи превращается в мышечную энергию, бóльшая же часть тратится на другие нужды — поддержание постоянной температуры тела, питание и возобновление тканей, образование жировых отложений («сберегательного банка» организма на случай голодовки или болезни). Любое превращение энергии в организме — будь то пищеварение или мышечная деятельность — завершается преобразованием в тепло. Это тепло непрерывно уходит в более холодную окружающую среду. Устанавливается тепловой баланс между организмом и окружающей средой.

«Гольбасто момарен эвлем гердайло шефинмоллиоллигу, могущественнейший император Лилипутии» выделял Гулливеру столько еды и питья, сколько требовалось для прокормления 1728 лилипутов. А это ведь могло погубить Гулливера...

Размеры животного имеют самое непосредственное отношение к этому тепловому балансу. Образование тепла более или менее равномерно происходит в объеме тела, т. е. пропорционально кубу линейного размера. А теплоотдача происходит в основном через поверхность тела, и потому она пропорциональна квадрату линейного размера. Вы догадываетесь, к чему это может привести? Если одно животное крупнее другого в 10 раз, то при равной скорости образования тепла крупное животное должно «генерировать» в 1000 раз больше тепла, чем мелкое, а теплоотдача у крупного больше всего в 100 раз. Крупное животное может просто «зажариться» в собственной шкуре. Природа, однако, предусмотрительно «позаботилась» о том, чтобы этого не случилось,— у крупных животных обмен веществ протекает менее интенсивно и скорость образования тепла в теле у них меньше. А поскольку, как мы знаем, тепло в организме млекопитающих образуется в результате окисления пищи, то мерой образования тепла может служить потребление кислорода. Оказывается, мелкие животные потребляют в минуту воздух, объем которого близок к объему их тела, а чем животное крупнее, тем меньшую часть их собственного объема составляет объем вдыхаемого ими воздуха. Поэтому чем меньше животное, тем интенсивнее протекает у него обмен веществ, тем больше частота дыхания и сердцебиения.

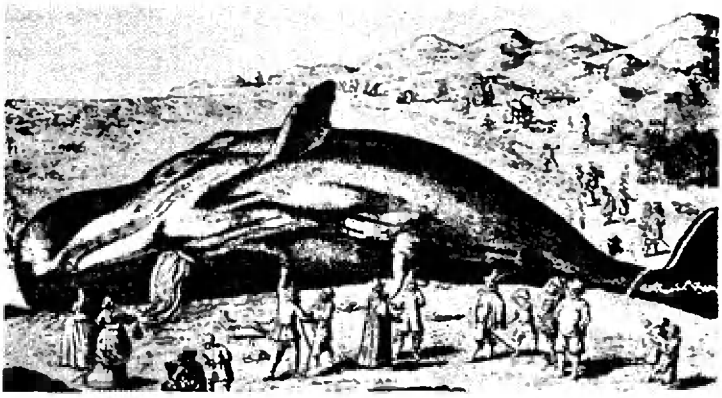
Но если у мелкого животного интенсивнее происходит обмен веществ, т. е. увеличивается скорость образования тепла в теле на единицу его массы, то «зажариться» в собственной шкуре должно как раз мелкое животное. Между тем у всех теплокровных животных температура тела примерно одинакова. Как же это объяснить?

С уменьшением размеров животного возрастает не только интенсивность образования тепла, но и интенсивность потерь. Это связано с тем, что с уменьшением размеров тела возрастает роль его поверхности по сравнению с объемом. Возьмем тот же пример: одно животное крупнее другого в 10 раз. Пусть их характерные линейные размеры соответственно 1 м и 0,1 м. Тогда отношение площади поверхности тела к его объему для крупного животного равно



единице, а для мелкого — десяти. А теплоотдача как раз и определяется площадью поверхности тела. (Кстати, именно поэтому дети мерзнут сильнее взрослых). Потерянное тепло, как мы знаем, восполняется в процессе химических реакций в организме. Поэтому для поддержания температуры тела, обеспечивающей нормальную жизнедеятельность, меньшие животные нуждаются в большем количестве пищи на единицу массы тела. Мелкие животные все время испытывают чувство голода и жажды. Это делает их беспокойными и подвижными, много времени они проводят в поисках пищи. Такое поведение как раз и характерно для мелких теплокровных, например грызунов. Потому-то на суше и не существует теплокровных меньших, чем землеройка, питающаяся насекомыми — меньшие теплокровные просто не успевали бы запасать и переваривать пищу.

Выходит, великана легче прокормить, чем лилипута? Легче, но только в мире великанов. Займемся опять расчетами. Скажем, обычный человек съедает в день трехсотграммовую булку. Это составляет примерно 1/200 часть его собственной массы. Так как потери энергии пропорциональны квадрату линейного размера, то потребность в пище в мире великанов в 144 раза больше нашей. А объем и вес всего съедобного возросли в 1700 раз. Значит, для утоления голода великану понадобится только 1/12 часть великаньей булки. Нетрудно подсчитать, что это будет всего около



Гипотез о причинах вымирания гигантских древних животных много, но факт остается фактом — исполины остались только в океане.

40 кг и при массе великана в 100 тонн составит лишь очень малую часть его собственной массы. Теперь посмотрим, как обстоит дело с питанием в мире лилипутов. Их потребность в пище в 144 раза меньше нашей, но объем и вес всего съедобного уменьшились в 1700 раз. Значит, чтобы насытиться, лилипуту нужно съесть 12 лилипутских булок, 12 порций супа и т. д.

Теперь обсудим еще один вопрос. Почему самые мелкие водные млекопитающие все же крупнее самых мелких теплокровных обитателей суши?

Дело в том, что водные млекопитающие, даже имеющие изолирующий жировой слой, отдают очень много тепла воде, и их существование становится возможным только при достаточно большом объеме тела.

Главным механизмом, регулирующим температуру тела, является его «центральное отопление» — система кровообращения. Кровь доставляет тепло от внутренних органов к капиллярам под кожей, а она уже отдает избыток тепла окружающему воздуху. Например, для человека в покое при температуре тела 37 °С и температуре среды 18 °С потери тепла распределяются таким образом: приблизительно 75 % теряется за счет излучения в инфракрасном диапазоне с длиной волны 9—10 мкм, остальное — за счет потовыделения и выдоха нагретого в легких воздуха. С повышением температуры среды потери тепла излучением уменьшаются: при 30 °С они составляют около 30 %. Перегрев организма при этом устраняется обильным потоотделением — на испарение каждого грамма влаги с поверхности кожи требуется около 2500 джоулей. Интересно отметить, что удельная мощность человека (т. е. мощность, приходящаяся на единицу его массы) составляет около 200 Вт/кг, что почти в 10 000 раз больше удельной мощности Солнца.

Система терморегуляции очень гибка и в условиях тропиков обеспечивает человеку возможность обходиться без одежды. Вообще организм человека и многих других животных лучше приспособлен к охлаждению, чем к перегреву. Снижение температуры тела на 10—12° еще не смертельно, тогда как при повышении температуры на 5—6° начинают сворачиваться белки. (Вот почему на медицинском термометре нет делений выше 42 °С.) Для человека смерть наступает при температуре тела выше 43 °С или ниже 25 °С. За миллионы лет эволюции человек «обзавелся» системой терморегуляторов, которые помогают ему поддерживать температуру на постоянном уровне.

Теперь вы понимаете, почему человек такой, какой он есть, а не великан и не лилипут?

Задачник «Кванта»

Задачи

М1231 — М1235, Ф1238 — Ф1242

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 сентября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1231» или «Ф1238». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1240 и Ф1241 предлагались на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по физике (Вологда, 1990).

М1231. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость Oxy графики n квадратных трехчленов вида $y=ax^2+bx+c$ ($n=1, 2, 3, \ldots$)?

Н. Васильев

М1232. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите следующие случаи:

а) p и q — взаимно простые числа;

б) p и q имеют наибольший общий делитель d.

Д. Фомин

М1233. В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна боковой стороне BC, H — середина основания AB. Пусть l — прямая, проходящая через H, а P и Q — точки пересечения прямой l с прямыми AD и BD соответственно. Докажите, что углы ACP и QCB равны или составляют в сумме $180°$.

И. Шарыгин

М1234. Можно ли любой треугольник разбить а) на 7, б)* на 5 подобных между собой треугольников?

А. Сойфер (США)

М1235*. Пусть $p=2\cdot q+1$ — простое число. Докажите, что число $2^{3q}q!-(-1)^q(2q-1)!!$ делится на а) p; б) p^2; в) p^3 (при $p>3$). (Здесь $q!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot q$; $(2q-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2q-1)$.)

И. Вайнштейн

Ф1238. В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится небольшой воздушный пузырек. Если поставить трубку вертикально, то пузырек будет двигаться с постоянной по величине скоростью $v_0=1$ см/с.

Трубку расположили горизонтально и разогнали ее вдоль длинной стороны до скорости $v=20$ м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с? Где он окажется после того, как трубку затормозят?

А. Андрианов

Ф1239. В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Начнем сжимать газ, опуская поршень. После того, как совершили работу A, поршень отпустили, и он остановился в новом положении равновесия. Найти температуру T_x в этом состоянии.

В. Уздин

Ф1240. В схеме, приведенной на рисунке 1, емкости конденсаторов равны C, сопротивления резисторов R и

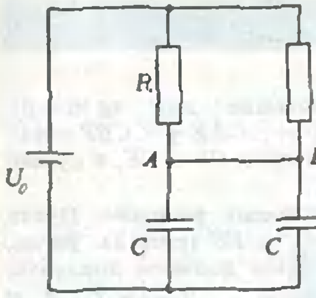


Рис. 1.

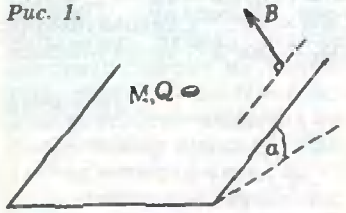


Рис. 2.

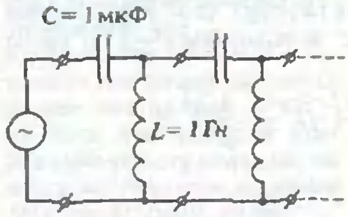


Рис. 3.

Задачник „Кванта"

2R. Какой заряд протечет через перемычку AB после подключения батарейки с напряжением U_0? А если между точками A и B включен резистор R? Все элементы считать идеальными.

А. Зильберман

Ф1241. На наклонной плоскости с углом α и коэффициентом трения μ лежит небольшая шайба массой M, на которой помещен заряд Q. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно наклонной плоскости, как показано на рисунке 2. Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление ее установившейся скорости.

А. Алексеев

Ф1242. Из нескольких одинаковых CL-звеньев, подключенных друг за другом, собрана цепь для измерений на частоте 50 Гц (рис. 3). К выходу последнего звена был подключен конденсатор, после чего ток, потребляемый всей цепью от источника, и разность фаз между этим током и приложенным напряжением перестали зависеть от числа подключенных звеньев. Какую емкость C_x имел подключенный конденсатор? Можно ли дать однозначный ответ на этот вопрос?

А. Зильберман

Решения задач

М1206—М1210, Ф1218—Ф1222

М1206. *В круге проведены два перпендикулярные друг другу диаметра AE и BF. На дуге EF взята точка C. Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE соответственно в точках P и Q (рис. 1). Докажите, что площадь четырехугольника APQB равна квадрату радиуса круга.*

Одно из наиболее простых решений получается прямым вычислением по формуле $S_{APQB}=AQ\cdot BP/2$. Если $\angle CAE=\alpha$, а $\angle CBF=\beta$, то $AQ=AO+OQ=R(1+\operatorname{tg}\beta)$, $BP=R(1+\operatorname{tg}\alpha)$, где O — центр, а R — радиус данного круга, и

$$S_{APQB}=\frac{1}{2}R^2(1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta).$$

Теперь надо доказать, что величина в скобках равна 2, т. е. что $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=1$. В левой части

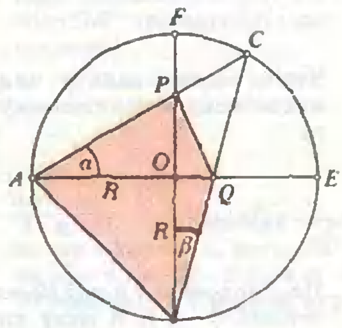


Рис. 1.

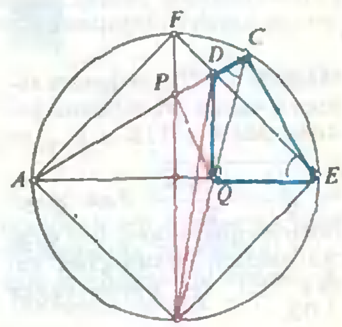


Рис. 2.

этого равенства стоит выражение для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Остается заметить, что $\alpha+\beta=\angle CAE+\angle CBF=45^\circ$ (углы CBF и CAE опираются на дуги CF и CE, в сумме составляющие 90°), а $\operatorname{tg} 45^\circ=1$.

Наметим и «чисто геометрическое» решение. Пусть D — точка пересечения хорд AC и EF (рис. 2). Тогда, очевидно, $S_{ABD}=S_{ABEF}/2=R^2$, и мы должны доказать, что $S_{ABD}=S_{ABPQ}$, т. е. что $S_{BDP}=S_{BQP}$. Точки Q, E, C и D лежат на одной окружности ($\angle QED=45^\circ=\angle QCD$); поэтому $\angle DQE=180^\circ-\angle DCE=90^\circ$. Следовательно, прямые DQ и BP параллельны, а значит, треугольники BDP и BQP равновеликие.

В. Дубровский

M1207. *Докажите, что для любых x, y и любого натурального m выполняется неравенство*

$$(x^2+y^2)^m \geqslant 2^m x^m y^m + (x^m-y^m)^2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что числа x и y положительны (поскольку $|x|^m|y|^m \geqslant x^m y^m$). Поделим обе части неравенства на $x^m y^m$ и положим $t=x/y$, тогда оно примет вид

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^m \geqslant 2^m+\left(\sqrt{t^m}-\frac{1}{\sqrt{t^m}}\right)^2,$$

или

$$f_m(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^m-t^m-\frac{1}{t^m} \geqslant 2^m-2.$$

Последнее неравенство докажем индукцией по m.

При $m=1$ оно, очевидно, выполнено. Пусть теперь известно, что $f_{m-1}(t) \geqslant 2^{m-1}-2$ при всех $t>0$. Тогда

$$f_m(t)=f_{m-1}(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)+t^{m-1}+\frac{1}{t^{m-1}} \geqslant$$
$$\geqslant (2^{m-1}-2)\cdot 2+2=2^m-2$$

(здесь использовано известное неравенство $a+1/a \geqslant 2$ при $a>0$), что и требовалось.

Неравенство превращается в равенство только при $t=1$, т. е. $x=y$.

В. Дубровский

M1208. *Последовательность чисел h_n задана условиями $h_1=1/2$ и $h_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$ для каждого n. Докажите, что сумма любого количества чисел h_n не превосходит 1,03.*

Чтобы решить задачу, надо догадаться сделать тригонометрическую подстановку: если $h_n=\sin\alpha$, $0<\alpha<\pi/2$, то

$$h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\alpha/2.$$

По условию $h_1=1/2=\sin\pi/6$, следовательно, $h_n=\sin(\pi/3\cdot 2^n)$. В силу известного неравенства $\sin x<x$ (при $0<x<\pi/2$)

$$h_1+h_2+\ldots+h_n=\frac{1}{2}+\sin(\pi/3\cdot 2^2)+\ldots+\sin(\pi/3\cdot 2^n)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{\pi}{3\cdot 2^n}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}<$$

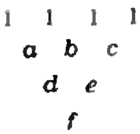
$$<(1+3{,}15)/2<1{,}03.$$

И. Акулич

М1209*. *Числовой треугольник, первая строка которого состоит из N единиц, вторая — из $N-1$ целых чисел, составляется по следующему правилу: для любых четырех чисел m, n, q, p, стоящих в вершинах ромбика (n и p — соседние числа в строке), выполняется равенство $np=mq+1$. Докажите, что*

а) если все числа в треугольнике отличны от 0, то все они целые;

б) если все числа в треугольнике натуральные, то в нем встречается не менее $N/4$ различных чисел.



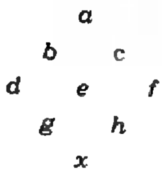


Рис. 1. *Рис. 2.*

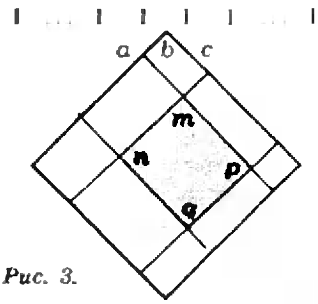


Рис. 3.

а) Легко проверить, что в первых четырех строках стоят целые числа; на рисунке 1

$d=ab-1$, $e=bc-1$, $fb=(ab-1)(bc-1)-1=$
$=ab^2c-ab-bc$, т. е. $f=abc-a-c$ (если $b\neq 0$).

Для следующих строк будем доказывать утверждение по индукции. Пусть все числа на рисунке 2, кроме x, целые (и отличны от 0). Так как $bc=ae+1$, $de=bg+1$, $ef=ch+1$, то

$gh=(ae+1)gh-aegh=bcgh-aegh=$
$=(de-1)(ef-1)-aegh=e(def-f-d-agh)+1.$

С другой стороны, $gh=ex+1$, т. е. (если $e\neq 0$) $x=$ $=def-f-d-agh$ — целое число.

б) Будем считать N четным (для нечетного N рассуждение аналогично). Рассмотрим квадрат, состоящий из $N/2$ «строк» и $N/2$ «столбцов» (наклоненных под углом 45°, рис. 3).

Докажем, что если всего различных чисел в квадрате меньше чем $N/4$, что найдутся две «строки», в пересечении которых с двумя разными «столбцами» стоят пары равных чисел. Действительно, в каждой «строке» есть по крайней мере $N/4$ пар равных чисел, значит, всего таких пар по крайней мере $(N/4)(N/2)=N^2/8$. Каждой такой паре сопоставим пару «столбцов», в которых стоят равные числа пары; поскольку всего пар «столбцов»

$$\frac{1}{2}\,\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)<\frac{N^2}{8},$$

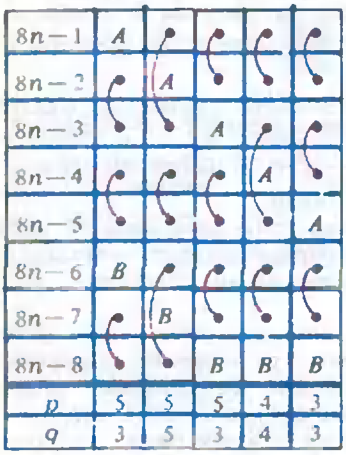
найдутся нужные две равные пары чисел (в вершинах голубого прямоугольника на рис. 3). Но равенство $mq=np$ невозможно, поскольку всегда $mq<np$; для квадратиков 1×1 это неравенство очевидно, а в общем случае оно получается перемножением соответствующих неравенств для всех квадратиков, составляющих голубой прямоугольник: все «лишние» буквы сокращаются.

Д. Фомин

М1210*. *Имеется кучка из M спичек и лист бумаги, на котором написано число M. Двое играют в такую*

Ответ: начинающий игрок (назовем его A) выигрывает во всех случаях, когда M не делится на $m=4[k/2]$, т. е. на $m=4$ при $k=2$ и на $m=8$ при $k=5$; если M кратно m, то выигрывает второй игрок (назовем его B).

игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок берет из кучки себе или возвращает в кучку от 1 до k спичек и записывает на листе, сколько спичек стало в кучке. (Вначале все имеющиеся спички лежат в кучке — у игроков спичек нет.) Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход или вынужден записать число, уже имевшееся на листе ранее. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если а) $k=2$; б) $k=5$?



A — первый ход игрока A в восьмерку ($8n-1$, $8n-8$), B — ответ игрока B; дужками показано разбиение на пары; p — запас спичек у игрока B, создаваемый после первого ответа, q — запас спичек, достаточный для повторных ответов.

Задачник „Кванта"

Идея выигрышной стратегии игрока B при M кратном $m (M=ms)$ относительно проста. Все числа от $M-1$ до 0 разбиваются на пары, и на каждый ход соперника игрок отвечает выписыванием парного числа. Сложность в том, чтобы гарантировать возможность ответа на любой ход, а для этого при $k>2$ разбиение приходится производить постепенно, в зависимости от ходов A.

Пусть теперь M не кратно m: $M=ms+n$. Если $1 \leqslant n \leqslant k$, то игрок A первым ходом берет n спичек, а дальше действует по выигрышной стратегии второго игрока для $M=ms$. Если же $M=ms+n$, где $k<n<m$, то A сразу начинает играть по этой стратегии для $M=m(s+1)$, условно считая, что первым ходил B, взяв $m-n$ спичек ($m-n<2k-k=k$). Это обеспечило бы выигрыш A, даже если бы у B действительно были эти $m-n$ спичек, и тем более, когда их у B нет.

Теперь объясним подробнее, как должен играть второй игрок при $M=ms$, если а) $k=2$ и б) $k=5$.

а) Разобьем числа от $M-1$ до 0 на четверки последовательных чисел ($M=4s$), а каждую четверку — на две пары вида ($4n-1$, $4n-3$) и ($4n-2$, $4n-4$). На каждый ход A игрок B отвечает парным числом, поэтому новую четверку всегда будет «открывать» A, выписывая одно из двух ее старших чисел — $4n-1$ или $4n-2$. После своего ответа на этот ход игрок B приобретет 2 спички, которые он зарезервирует для ответа на возможный повторный ход A в эту четверку (если это будет ход $4n-3$ или $4n-4$). Таким образом, для B всегда обеспечен ответный ход, а значит, и общий выигрыш.

б) Стратегия второго игрока при $k=5$ в целом такая же, как и при $k=2$. По-другому только делается разбиение на пары. Из чисел от 0 до $M-1$ образуются не четверки, а группы по $m=8$ штук. Каждая восьмерка разбивается на пары после того, как будет выписано какое-то число из нее. Как и в п. а), это будет одно из $k=5$ старших чисел этой восьмерки и выпишет его игрок A. Ответ B и разбиение на пары для всех пяти вариантов приведены на рисунке. Коротко можно сказать так: в ответ на ход, «открывающий» новую группу, игрок B выписывает наименьшее возможное число из этой группы, а оставшиеся ее $m-2$ чисел разбивает на пары соседних (без учета двух выписанных). Это правило годится для всех значений k. Запаса спичек, создаваемого после первого ответного хода B, будет достаточно, чтобы обеспечить возможность ответа на все дальнейшие ходы A в эту группу; при $k=5$ это видно непосредственно из рисунка (запас состоит из 5, 4 или 3 спичек), а в общем случае это несложно проверить, причем здесь важно, что $m=4[k/2]$.

Таким образом, ответ, сформулированный в начале решения, справедлив при всех значениях k.

К. Кохась

Ф1218. ***Цилиндр массой М находится между подвижной горизонтальной поверхностью и закрепленной под углом α наклонной плоскостью (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о горизонтальную поверхность μ_1, о наклонную — μ_2. Горизонтальную поверхность равномерно двигают влево. Какую минимальную силу приходится для этого прикладывать?***

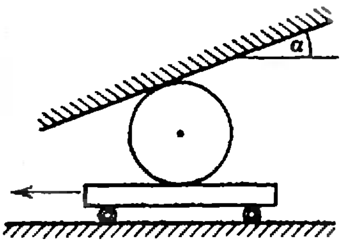


Рис. 1.

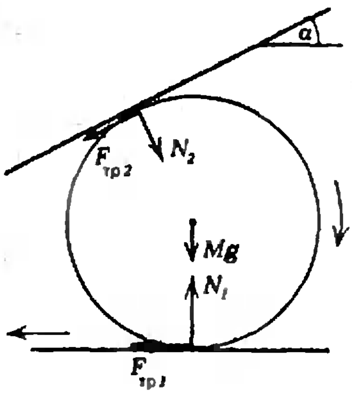


Рис. 2.

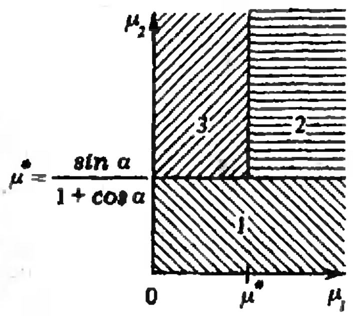


Рис. 3.

Очевидно, что у цилиндра есть две возможности: вра щаться или не вращаться. Предположим первое. Тогд при равномерном движении горизонтальной поверх ности влево цилиндр будет вращаться с постоянно угловой скоростью. Следовательно, сумма моменто действующих на цилиндр сил относительно его центр равна нулю; поэтому (см. рис. 2) $F_{тр1}=F_{тр2}$. Кроме того ускорение центра масс цилиндра и, следовательно, век торная сумма действующих на него сил тоже равны ну лю. Проектируя на горизонтальную ось, получаем

$$N_2\sin\alpha - F_{тр2}\cos\alpha - F_{тр1} = 0. \qquad (1$$

Проекция на вертикальную ось дает

$$N_1 - Mg - N_2\cos\alpha - F_{тр2}\sin\alpha = 0. \qquad (2$$

Обозначим $F_{тр1}=F_{тр2}=F$. Тогда из равенства (1) на ходим

$$F = N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad (3$$

а из равенства (2) получаем

$$N_1 - Mg - N_2\cos\alpha - N_2\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = 0,$$

или

$$N_1 = Mg + N_2. \qquad (4$$

В зависимости от соотношения между μ_1, μ_2 и α возможны два случая.

Случай 1. Пусть $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$. При этом цилиндр вращается, и $F=\mu_2 N_2$. Тогда из равенства (3) следует, чт

$$N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mu_2 N_2.$$

Возникают две возможности:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} > \mu_2$; при этом $N_2=0$ и $F=0$. Условие $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ соблюдается для любых μ_1 и μ_2.

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} < \mu_2$; при этом происходит заклинивани цилиндра. Условие $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ соблюдается, если $\mu_1 > \mu_2$.

Случай 2. Пусть $\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$. Тогда цилиндр не вращается, и $F=\mu_1 N_1$. Из равенств (3), (4) получаем

$$\mu_1 N_1 = N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ или } \mu_1(Mg+N_2) = N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

откуда

$$N_2 = \frac{\mu_1 Mg}{\sin\alpha/(1+\cos\alpha) - \mu_1}.$$

Снова возникают две возможности:

а) $\mu_1 \geqslant \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; при этом происходит заклинивание. Условие $\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$ соблюдается, если $\mu_1 < \mu_2$.

б) $\mu_1 < \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; тогда

$$F=\mu_1 N_1=\mu_1(N_2+Mg)=\frac{\mu_1 Mg}{1-\mu_1(1+\cos\alpha)/\sin\alpha}.$$

Условие $\mu_1 N_1<\mu_2 N_2$ выполняется, когда

$$\mu_1(Mg+N_2)<\mu_2 N_2, \text{ или } \mu_2>\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Представим окончательный ответ графически.

Изобразим плоскость (μ_1, μ_2) и разделим ее на три области (рис. 3). В области *1* (случай 1, *а*) искомая сила

$$F=0.$$

В области *2* (случаи 1, *б* и 2, *а*) происходит заклинивание, и

$$F\to\infty.$$

В области *3* (случай 2, *б*)

$$F=\frac{\mu_1 Mg}{1-\mu_1(1+\cos\alpha)/\sin\alpha}.$$

М. Цыпин

Ф1219. *Погремушка в виде полого стального шара объемом 0,2 л содержит внутри 300 стальных шариков радиусом 1 мм. Ее трясут так, что шарики внутри непрерывно сталкиваются между собой и со стенками, издавая ужасный шум. Считая скорость погремушки равной 1 м/с, оцените число соударений между шариками за 1 минуту. Излучаемая звуковая мощность равна 10 Вт, выделением тепла при ударах пренебречь.*

Заметим, что 10 ватт — это очень большая мощность (обычные громкоговорители имеют КПД порядка долей процента и при подводимой к ним мощности, скажем, 100 ватт излучают мощность намного меньше 1 ватта), так что трясти придется очень энергично. Сделаем оценку минимальной частоты, с которой нужно трясти погремушку.

Пусть за время τ движения погремушки в одну сторону внутри все успевает установиться, и центр масс шариков получает скорость v_0. Тогда среднюю силу $F_{ср}$ можно оценить из соотношения для импульсов — за время τ импульс всех шариков изменится на $2Nmv_0$:

$$F_{ср}\tau=2Nmv_0,\quad F_{ср}=2Nmv_0/\tau.$$

Мощность этой силы должна быть равна $P=10$ Вт:

$$F_{ср}v_0=P,\quad \tau=2Nmv_0^2/P.$$

Массу шарика найдем, зная его радиус r и плотность ρ:

$$m=4\pi\rho r^3/3.$$

Тогда

$$\tau=0{,}002\ \text{с}.$$

Ясно, что «голыми руками» так трясти не получится — нужно применить какое-нибудь механическое устройство (на самом деле мы дали оценку времени τ сверху — движение не обязательно успевает установиться).

Обсудим теперь физическую модель явления. Подкачка энергии в систему происходит за счет внешних сил — средняя энергия шариков, ударяющихся о подвижную стенку, меняется, а скорость корпуса остается по условию постоянной. Из этих соображений можно посчитать работу внешних сил (учитывая изменение энергии шариков и число ударов о каждую из сторон корпуса — набегающую и убегающую).

Будем считать, что в установившемся режиме средняя квадратичная скорость шариков остается практически неизменной, существенно превышая по модулю скорость корпуса, а скорость центра масс шариков практически равна нулю. Эти предположения мы в конце должны будем проверить.

Ясно, что, ударившись о набегающую стенку, шарик увеличит свою энергию, а после удара об убегающую — уменьшит ее. Движение корпуса происходит вдоль одной оси — изменяется при ударе только эта составляющая скорости. Поэтому вместо сферы можно взять цилиндр такого же поперечного сечения S, движущийся вдоль своей оси, и учесть удары шариков о его торцы. Для теряющего энергию шарика

$$\Delta E_1 = mu_x^2/2 - m(u_x - 2v_0)^2/2,$$

для получающего

$$\Delta E_2 = m(u_x + 2v_0)^2/2 - mu_x^2/2,$$

где u_x — проекция скорости шарика на ось цилиндра. Расчет числа ударов о торец проведем стандартным способом:

$$N_1 = nS(u_x - v_0)\Delta t/2, \ N_2 = nS(u_x + v_0)\Delta t/2,$$

где n — «концентрация» шариков в сосуде.

В установившемся случае средняя энергия системы остается постоянной; значит, изменение энергии шариков за единицу времени и есть мощность P. Рассчитаем скорости шариков из этого соотношения:

$$P\Delta t = \Delta E_2 N_2 - \Delta E_1 N_1 = 4nSmv_0^2 u_x,$$

$$u_x = P/(4nmSv_0^2) \approx 30 \text{ м/с}.$$

Это — одна компонента скорости, а средняя квадратичная скорость шарика

$$u = u_x\sqrt{3} \approx 50 \text{ м/с}.$$

Она и в самом деле существенно превышает скорость корпуса. А предположение о том, что скорости шариков не успевают стать в среднем равными скорости корпуса, должно проверяться иначе. Поскольку для такого установления требуется достаточно много ударов между шариками, нужно найти длину свободного пробега и время между ударами. Собственно, это и требуется в задаче.

Длина свободного пробега

$$\lambda = V/(4\pi r^2 N) \approx 5 \text{ см}.$$

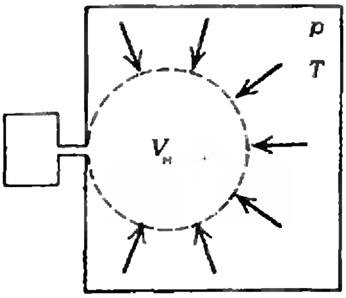
За время пролета этого расстояния каждый шарик в среднем испытывает одно соударение; значит, всего за это время произойдет $N^2/2$ ударов (в каждом ударе участвуют два шарика). Окончательно число ударов за время $\tau = 1$ мин равно

$$N_{\text{общ}} = 2\pi r^2 N^2 u\tau/V \approx 10^7.$$

А. Зильберман

Автор признателен А. Ходулеву за полезное обсуждение условия задачи и ее решения.

Ф1220. *Небольшой баллончик с остатками неона для пополнения подсоединяют на короткое время к большому резервуару, где давление p в два раза выше, чем в баллончике. Баллончик отсоединяют сразу после его заполнения. Каким будет окончательное давление газа в баллончике? Теплообменом газа со стенками баллончика при его заполнении пренебречь.*



Сначала в баллончике находится газ под давлением $p/2$ при температуре T:

$$\frac{p}{2}V=\nu RT,$$

где V — объем баллончика, ν — количество газа. После подсоединения из большого резервуара в баллончик перейдет порция газа ν_1, которая доведет давление внутри баллочника до значения p при первоначально установившейся температуре T_x:

$$pV=(\nu+\nu_1)RT_x.$$

Для расчета примем, что «наружный» газ совершил над вошедшей порцией газа некоторую работу при постоянном давлении p, и за счет этой работы увеличилась внутренняя энергия газа в баллончике. Это позволит нам записать соотношение, в которое войдут полное количество газа в баллончике и установившаяся температура.

Через некоторое время температура внутри баллончика уравняется с температурой в резервуаре, а давление p_x установится окончательно — оно упадет по отношению к p во столько же раз, во сколько упадет температура газа:

$$\frac{p_x}{p}=\frac{T}{T_x}.$$

Теперь проведем расчеты.

Выделим (см. рисунок) тот объем $V_н$ «наружного» газа, который затем окажется внутри баллончика, и запишем выражение для работы:

$$A=pV_н.$$

Объем $V_н$ выразим из уравнения состояния газа:

$$V_н=\frac{\nu_1 RT}{p}.$$

Поскольку неон — одноатомный газ, изменение внутренней энергии газа, оказавшегося в баллончике, можно записать в виде

$$\Delta U=\frac{3}{2}(\nu+\nu_1)RT_x-\frac{3}{2}(\nu+\nu_1)RT.$$

Из закона сохранения энергии

$$A=\Delta U,$$

учитывая уравнения состояния газа, получим

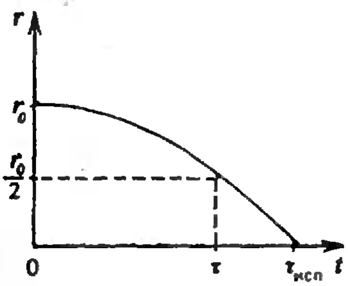
$$T_x=5/4\ T.$$

Тогда окончательно

$$p_x=pT/T_x=0{,}8\ p.$$

Е. Бутиков

Ф1221. *В прошлом веке русский ученый Б. И. Срезневский исследовал испарение капель жидкости в воздухе. Пусть это испарение происходит при постоянной разности температур за счет подвода тепла к капле от окружающей среды. Считая поток тепла на единицу поверхности шаровой капли пропорциональным разности температур и обратно пропорциональным радиусу капли, найти зависимость радиуса капли от времени. За какое время окончательно испарится капля, радиус которой уменьшился в два раза за 10 минут?*



Согласно условию задачи, за малое время Δt к поверхности шаровой капли площадью $4\pi r^2$ подводится количество теплоты

$$\Delta Q = \frac{\alpha(T_в - T_к)}{r} 4\pi r^2 \Delta t.$$

Здесь r — радиус капли, α — постоянный коэффициент, зависящий от теплопроводности окружающей среды, $T_в$ и $T_к$ — температуры воздуха и капли ($T_в > T_к$). Это тепло затрачивается на испарение некоторой массы жидкости Δm. Если обозначить L удельную теплоту испарения жидкости, то можно записать закон сохранения энергии в виде

$$L\Delta m = -\Delta Q = -\alpha(T_в - T_к) 4\pi r \Delta t$$

(знак минус в правой части указывает на то, что с течением времени масса жидкости убывает).

Но $m = 4/3\pi r^3 \varrho_0$, где ϱ_0 — плотность вещества капли; поэтому

$$\Delta m = 4\pi r^2 \varrho_0 \Delta r.$$

Подставив последнее соотношение в уравнение для энергии, получим

$$r\Delta r = -\frac{\alpha(T_в - T_к)}{L\varrho_0} \Delta t,$$

или

$$(r^2)' = -\beta,$$

где $\beta = 2\alpha(T_в - T_к)/(L\varrho_0)$ — положительная постоянная.

Отсюда видно, что квадрат радиуса капли линейно убывает со временем:

$$r^2 = r_0^2 - \beta t,$$

где r_0 — значение радиуса в начальный момент времени $t=0$, а сам радиус убывает по закону (см. рисунок)

$$r = \sqrt{r_0^2 - \beta t}.$$

По условию, за время $\tau = 10$ мин $= 600$ с радиус капли уменьшился вдвое, т. е. стал $r_0/2$, так что

$$\frac{r_0^2}{4} = r_0^2 - \beta\tau,$$

$$\beta = \frac{3}{4}\,\frac{r_0^2}{\tau}.$$

Обозначим время полного испарения через $\tau_{исп}$. Оно находится из условия

$$r = 0 \text{ при } t = \tau_{исп},$$

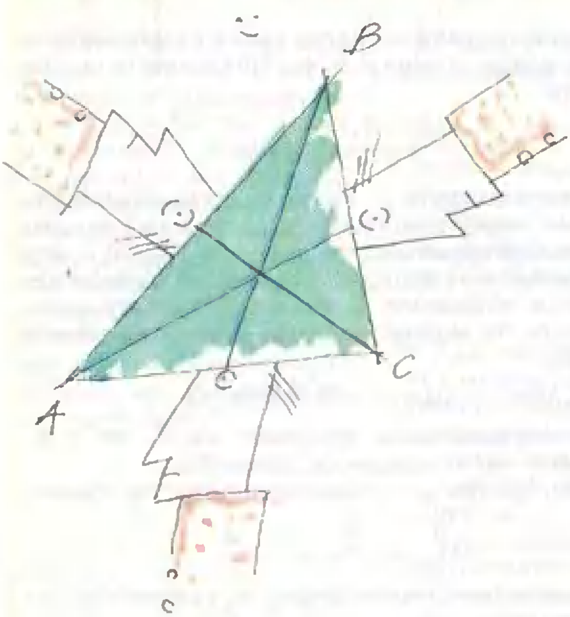
откуда

$$\tau_{исп} = \frac{r_0^2}{\beta} = \frac{4}{3}\tau = 800 \text{ с}.$$

А. Стасенко

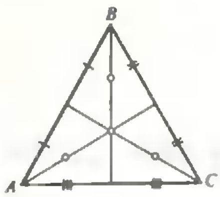
(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

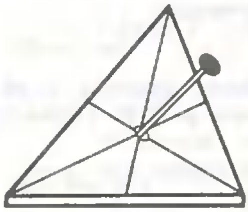


Медианы треугольника

Как известно, медианами треугольника называются отрезки, соединяющие его вершины с серединами противоположных сторон. Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1:2.

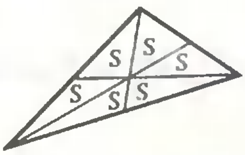


Точка пересечения медиан является также центром тяжести треугольника. Если подвесить картонный треугольник в точке пересечения его медиан,



то он будет находиться в состоянии равновесия.

Любопытно, что все шесть треугольников, на которые всякий треугольник разбивается своими медианами, имеют одинаковые площади. Медианы треугольника через его стороны выражаются так:

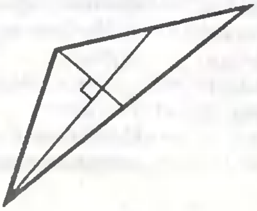


$$m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2},$$

$$m_b=\frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2},$$

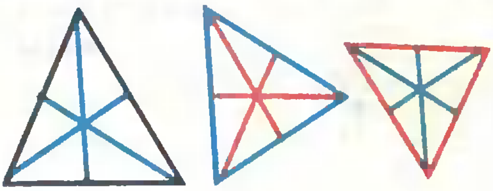
$$m_c=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

Если две медианы перпендикулярны, то сумма квадратов сторон, на которые они опущены, в 5 раз больше квадрата третьей стороны.



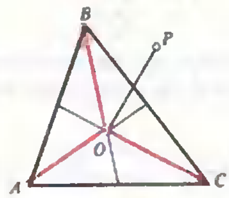
Построим треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника, тогда медианы построенного треугольника будут равны 3/4 сторон первоначального треугольника.

Данный треугольник назовем первым, треугольник из его медиан — вторым, треугольник из медиан второго — третьим и т. д. Тогда треугольники с нечетными номерами (1, 3, 5, 7, ...) подобны между собой и треугольники с четными номерами (2, 4, 6, 8, ...) также подобны между собой.



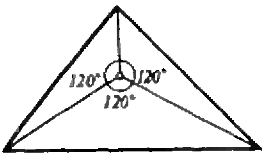
Сумма квадратов длин всех медиан треугольника равняется 3/4 суммы квадратов длин его сторон.

Знаменитый немецкий математик Г. Лейбниц обнаружил замечательный факт: сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до вершин треугольника, лежащего в этой плоскости, равняется сумме квадратов расстояний от точки пересечения медиан до его вершин, сложенной с утроенным квадратом расстояния от точки пересечения медиан до выбранной точки.

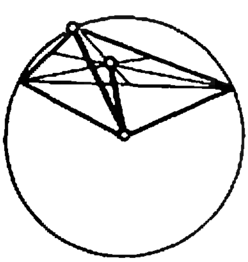


Из этой теоремы следует, что точка на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до вершин данного треугольника является минимальной,— это точка пересечения медиан этого треугольника.

В то же время минимальная сумма расстояний до вершин треугольника (а не их квадратов) будет для точки, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в 120°, если ни один из углов треугольника не больше 120° (точка Ферма), и для вершины тупого угла, если он больше 120°.



Из теоремы Лейбница и предыдущего утверждения легко найти расстояние d от точки пересечения медиан до центра описанной окружности. Действительно, это расстояние по теореме Лейбница равно корню квадратному из одной трети разности между суммой квадратов расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника и суммой квадратов расстояний от точки пересечения медиан до вершин треугольника. Получаем, что $d=\sqrt{R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}}$.



Попробуйте решить следующие задачи на построение:
Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по:

1.1. Двум сторонам и медиане, опущенной на третью сторону.

1.2. Двум сторонам и медиане, опущенной на одну из них.

2.1. Стороне и двум медианам, опущенным на другие стороны.

2.2. Стороне и двум медианам, одна из которых опущена на эту сторону.

3.1. По трем медианам.

Нетрудно совершить построение с помощью циркуля и линейки в аналогичных задачах, полученных из этих заменой слова «медиана» словом «высота», но при замене слова «медиана» словом «биссектриса» указанное построение в ряде случаев произвести оказывается невозможно.

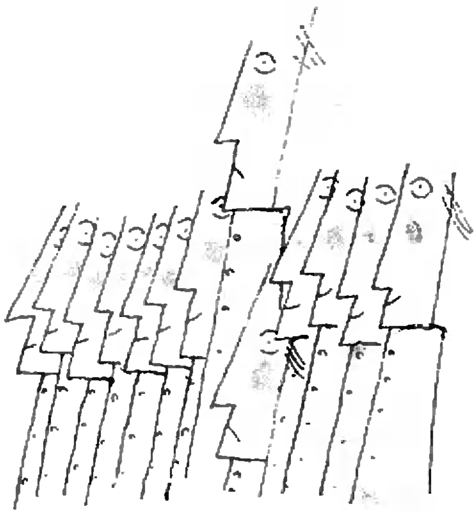
Точка M пересечения медиан треугольника ABC является единственной точкой треугольника, для которой сумма векторов $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ равна нулю. Координаты точки M (относительно произвольных осей) равны средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. Из этих утверждений можно получить доказательство теоремы о медианах. Кстати, в первом номере «Кванта» за этот год вы можете найти целых шесть доказательств этой теоремы.

Медианы бывают не только в геометрии, но и в математической статистике. Пусть нужно найти среднее значение некоторого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Можно, конечно, за среднее принять среднее арифметическое $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Но иногда это неудобно. Допустим, что нужно определить средний рост второклассников Москвы. Опросим наугад 100 школьников и запишем их рост. Если один из ребят в шутку скажет, что его рост равен километру, то среднее арифметическое записанных чисел окажется слишком большим. Гораздо лучше в качестве среднего взять *медиану* чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Предположим, что чисел — нечетное количество, и расставим их в неубывающем порядке. Число, оказавшееся на среднем месте, называется медианой набора. Например, медиана набора чисел 1, 2, 5, 30, 1, 1, 2 равна 2 (а среднее арифметическое значительно больше — оно равно 6). Статью о применении понятия медианы в статистике мы планируем поместить в одном из ближайших номеров «Кванта».

Оказывается, можно говорить о медианах не только для треугольника, но и для тетраэдра — дело в том, что отрезки, соединяющие центры тяжести граней тетраэдра с противоположными вершинами, всегда пересекаются в одной точке. В этой точке пересекаются еще четыре отрезка, соединяющие середины противоположных ребер (эти отрезки иногда называют бимедианами). Эта точка — центр тяжести тетраэдра. В точке пересечения медианы тетраэдра делятся в отношении 3:1. Это можно доказать, например, из механических соображений, поместив в каждую из четырех вершин тетраэдра грузики единичной массы.



Задачник „Кванта"

Ф1222. *Катушку индуктивности с $L=10$ Гн подключают к сети 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (рис. 1). Нарисовать график тока в катушке в зависимости от времени. Чему равно максимальное значение тока? Как зависит вид графика от момента подключения цепи к сети?*

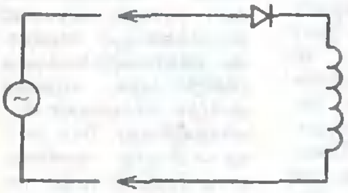


Рис. 1.

Действительно, вид графика тока в катушке существенно зависит от момента подключения цепи к сети.

Так, в случае если напряжение в сети в этот момент отрицательное, диод, включенный в цепь, будет закрыт до тех пор, пока напряжение не сменит знак. Затем диод откроется и будет открыт до того момента, когда ток в катушке упадет до нуля — пока катушка обладает энергией, она не даст диоду закрыться (создавая необходимое напряжение — ЭДС самоиндукции).

Теперь построим график (рис. 2). Сначала тока в катушке нет. Когда диод откроется, напряжение на катушке будет равно напряжению сети. Такой же будет

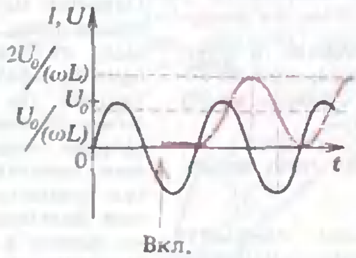


Рис. 2.

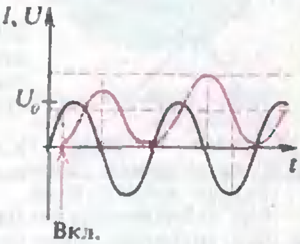


Рис. 3.

и ЭДС самоиндукции. Учтем ее связь с производной тока по времени: $\mathcal{E}_i=-LI'$ и найдем ток как первообразную. Таким образом, график зависимости тока в катушке от времени представляет собой приподнятую над осью синусоиду. Характерно, что диод будет открыт все время (если угодно, он закрывается лишь в моменты, когда $I=0$).

Если же в момент подключения цепи к сети напряжение сети положительное, диод откроется сразу и закроется лишь в тот момент, когда ток в катушке упадет до нуля. Дальше все будет, как в уже рассмотренном первом случае. Окончательный график представлен на рисунке 3.

З. Рафаилов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1186 — М1200, Ф1193 — Ф1207, справились с задачами М1186, М1187, М1193. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Акимов (Евпатория) 88—90; *А. Акопян* (Ереван) 88—91, 95; *А. Алексеев* (Донецк) 88—91, 94; *Р. Алиев* (Джалилабад) 88, 90; *С. Альперсон* (Одесса) 89; *Д. Андриенко* (Киев) 90, 91, 94, 96, 97; *А. Ахмедов* (Баку) 89, 95—97; *Е. Балдин* (Новосибирск) 90; *В. Барановский* (Омск) 88—92, 94, 95; *Е. Беркович* (Киев) 90; *А. Бородин* (Донецк) 88—90; *В. Ванчурин* (Москва) 88—91, 94, 97, 99; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 90; *Ю. Водопьянов* (Конотоп) 90; *К. Волченко* (Донецк) 88—91; *И. Воскобойник* (Киев) 90; *И. Герман* (Ленинград) 88, 90, 91, 96, 98; *А. Глебов* (Новосибирск) 89, 90; *В. Головко* (Киев) 89, 90; *А. Гордиященко* (п. М. Рогань Харьковской обл.) 97; *П. Гринфельд* (Москва) 88—92, 95, 97, 99; *Д. Гринштейн* (Омск) 91, 95; *А. Гурман* (Одесса) 88, 90; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 90; *С. Дориченко* (Берегово) 90; *И. Егорова* (Ленинград) 91, 94, 95; *И. Жук* (д. Дягильно БССР) 90; *В. Зязев* (Киров) 89, 90; *Н. Ивченко* (Киев) 94; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 88—90, 96—00; *С. Иноземцев* (Омск) 89—91, 95; *А. Ионес* (Ленинград) 99; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 89, 90; *С. Кимбар* (д. Дягильно БССР) 97; *С. Коваценко* (Винница) 88—90, 92, 94—99; *А. Козачко* (Винница) 88, 90—92, 94—99; *Д. Козлов* (Ленинград) 88, 90, 91, 95—99; *А. Копылов* (п. Черноголовка Московской обл.) 90; *А. Костенко* (Клайпеда) 96; *А. Кротенко* (Киев) 90; *А. Кудрявцева* (Киев) 90; *Г. Ланской* (Гомель) 90; *А. Майлыбаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 90, 94—97; *М. Марченко* (Гайворон) 89, 90; *А. Медведев* (Владимир) 96—00; *К. Мишачев* (Липецк) 88—90, 95—97; *А. Морозова* (Одесса) 88; *Р. Мучник* (Винница) 88—92, 94—99; *А. Насыров* (Обнинск) 88—92, 94, 95; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 88—91, 94—99; *Г. Ониани* (Кутаиси) 95, 96; *В. Острик* (Мариуполь) 88, 90, 95, 96, 99; *Т. Панов* (Киев) 90, 92, 94; *А. Пачев* (Москва) 96, 97; *Е. Перельман* (Ленинград) 88—91, 96, 98, 99; *Б. Петренко* (Днепропетровск) 90; *И. Пивень* (Киев) 90; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 96; *М. Плотников* (Вологда) 90; *Т. Погуляева* (Москва) 94, 95; *А. Разин* (Одесса) 90; *К. Саввиди* (Ереван) 90; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 96; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) 88—91, 95; *С. Таймaнов* (Раменское) 89, 90; *М. Темкин* (Москва) 88—92, 94, 95, 97, 99; *С. Тихонов* (Воронеж) 88—90; *А. Уханов* (Евпатория) 89, 90; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 90, 91, 95—99; *М. Хасин* (Донецк) 88—91, 96; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 90; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 90; *В. Цветков* (София, НРБ) 89, 90; *А. Чашка* (п. Владимирец Ровненской обл.) 89; *Г. Шаповалов* (Киев) 91; *А. Шиндлер* (Феодосия) 88; *В. Эйгес* (Москва) 95; *А. Яремчук* (Артемовский) 97.

Физика

А. Абжанов (Алма-Ата) 03; *Л. Анкудинов* (Киев) 94; *С. Антипин* (Северодвинск) 93—97, 99—01; *С. Ахметзянова* (Белорецк) 05; *Т. Бакеев* (Алма-Ата) 93—96, 98, 00, 01, 03—07; *В. Бакулин* (Новосибирск) 93, 95—97, 00, 04, 06; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 93—97, 00, 03—07; *С. Бардина* (Старый Оскол) 93, 94, 96, 03—05, 07; *Р. Баскаков* (Красноярск) 95—97, 00, 01; *Д. Баско* (Москва) 03, 04; *М. Беднюк* (Аша) 94; *М. Беломытцев* (Москва) 05; *С. Бобровник* (Черновцы) 93—96; *В. Бондаренко;* (Кузнецовск) 00; *Р. Бруожис* (Вильнюс) 96; *Р. Бучко* (Черновцы) 93, 96; *Г. Важенин* (Свердловск) 93—97; *А. Варданян* (Ереван) 03, 04; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 93—97, 04, 05, 07; *А. Викол* (Нерюнгри) 93—96, 04, 05; *С. Витко* (Брест) 05; *А. Воронин* (Старый Оскол) 93, 96, 03—05, 07; *О. Воротникова* (Красноярск) 96, 05, 07; *И. Воскобойник* (Киев) 96, 03, 05—07; *Г. Выгон* (Москва) 94, 96, 01, 04—07; *В. Высоцкий* (Киев) 93, 94, 96, 97, 01, 03—07; *А. Гадисов* (Баку) 04; *К. Галичский* (Северодвинск) 93—07; *А. Гвоздев* (Рига) 93, 94, 03; *В. Головко* (Киев) 94; *П. Гребнев* (Кузнецовск) 00; *А. Гринчук* (д. Мохро Брестской обл.) 93, 96, 97, 03, 05, 07; *Д. Грязных* (Челябинск) 93—97, 99, 01, 03—06; *В. Губин* (Новосибирск) 93, 96, 97, 03, 07; *О. Гусар* (Канев) 93, 94, 96; *Ю. Гуц* (Ровно) 93—97, 04, 05, 07; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 96; *С. Демба* (Старый Оскол) 93, 94, 96, 03, 04, 07; *Н. Демчук* (Здолбунов) 93, 96, 97, 03—05; *С. Диброва* (Киев) 93, 96, 03—07; *Р. Димитров* (Варна, НРБ) 93, 95—97, 00, 03, 04, 07; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 03—05, 07; *О. Дойникова* (Старый Оскол) 96, 03, 04; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 94, 96, 97; *А. Дубовик* (Брест) 96, 03—05, 07; *М. Емлин* (Свердловск) 96; *П. Жаврид* (Минск) 03—05, 07; *С. Жаров* (Ростов) 93; *А. Жук* (Ровно) 99—01; *Д. Жуковский* (Брест) 96, 05; *В. Жуликов* (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 03, 05; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 93, 03—05, 07; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 93, 96, 03, 04; *В. Злобов* (Старый Оскол) 93, 96, 03—05, 07; *Ф. Ибрагимов* (Баку) 93—97, 00; *Н. Ивченко* (Киев) 93, 96, 03—05; *А. Исенев* (Усть-Каменогорск) 03—05, 07; *И. Кабаев* (Вязники) 94, 96; *Д. Кабыш* (Москва) 03—06; *Т. Калита* (Киев) 93, 96, 03—05, 07; *К. Калюжный* (Одесса) 96, 97; *И. Кацман* (Киев) 05, 07; *А. Каширин* (Старый Оскол) 03, 04, 07; *С. Кельман* (Алма-Ата) 93, 95—97, 99, 00, 03—05, 07; *К. Кладько* (Харьков) 94—97; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 93, 96, 00, 04, 05; *М. Ковалев* (Губкин) 93—97; *С. Коваль* (Гомель) 93—97, 00, 01, 03—05, 07; *В. Козлов* (Старый Оскол) 93, 96, 03, 04, 07; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 93, 96, 97, 99, 00, 03—06; *Ю. Контиевский* (Каушаны) 07; *А. Короновский* (Саратов) 03, 04; *В. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 97; *С. Костюк* (Коломна) 94; *В. Кутузов* (Рига) 93, 94, 96, 97, 03; *А. Лабунец* (Одесса) 95, 96; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 04; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 94, 96, 97; *А. Литвак* (Киев) 95, 06; *В. Лобанцов* (Грозный) 93; *А. Ляпин* (Нальчик) 93—96, 00, 03, 04, 07; *В. Мавзовин* (Саратов) 05; *В. Макаров* (Кировское) 00; *Ю. Маравин* (Евпатория) 93, 96; *И. Мартин* (Таллинн) 99, 00; *А. Матюк* (Киев) 05; *Ю. Матюнин* (Вольск) 94—97; *Н. Мацко* (Киев) 03—07; *Р. Машковский* (Киев) 05; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 05, 07; *Р. Мизюк* (Ровно) 94—97, 03—05, 07; *Д. Миров* (Оренбург) 04, 05, 07; *О. Мирошниченко* (Луцк) 93; *Е. Мищенко* (Черновцы) 93, 96, 97; *А. Муравьев* (Свердловск) 03—05, 07; *Ю. Мусатенко* (Киев) 05; *В. Мытько* (Ленинград) 93—97, 99—01, 03—06; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 05, 06; *Т. Насардинов* (Грозный) 93, 94; *А. Нежуренко* (Киев) 03; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 05, 07; *Н. Никончук* (Брест) 93; *И. Новиков* (Калининград) 93; *Д. Омецинский* (Киев) 93—97, 99, 00, 03—07; *А. Орловский* (Киев) 93—97; *Д. Островский* (Ленинград) 96; *А. Павленко* (Краматорск) 93, 94, 96, 03, 05, 07; *А. Павлощук* (Киев) 96, 97, 99, 00, 03, 05; *Ю. Пайвин* (Харьков) 05; *В. Парфенов* (Львов) 04, 05; *Ю. Парфенов* (Москва) 06; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 93, 94, 96, 03, 04, 06; *Н. Петрова* (Старый Оскол) 05, 07; *И. Пилюгин* (Алма-Ата) 93, 95—97, 99, 00, 03—06; *А. Погребняк* (Киев) 96, 03, 05, 07; *С. Подпрятов* (Киев) 93, 94, 05; *И. Полищук* (Москва) 03—07; *В. Полищук* (Канев) 93, 94, 96, 97, 99, 03—05, 07; *С. Польшин* (Харьков) 97, 03, 05—07; *В. Попов* (Ростов) 04, 05; *Е. Призант* (Одесса) 93—97; *В. Пузанов* (Донецк) 93, 95; *А. Распереза* (Брест) 94, 96, 97, 03, 04; *Х. Рахимов* (Шават) 93; *Г. Розенталь* (Киев) 03, 05, 06; *А. Рыбалочка* (Киев) 93, 96, 03—05; *Н. Рябова* (Харьков)

96, 97; *А. Савин* (Горловка) 96, 97; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 05, 06; *У. Сапаев* (Шават) 93; *Р. Сеннов* (Москва) 03—05; *А. Скабелин* (Барановичи) 93—98, 00, 01, 03—07; *А. Смирнов* (Москва) 04; *А. Снежко* (Киев) 03—07; *Ю. Спектор* (Киев) 95—97, 00, 03—05, 07; *А. Стрелец* (Ленинград) 04; *Д. Супрун* (Минск) 03—05; *С. Тайманов* (Раменское) 93, 96; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 93—97, 03—07; *М. Титов* (Киев) 05; *С. Тихонов* (Воронеж) 93, 96; *А. Тохтаев* (Чарджоу) 05; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 03, 05; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 93, 94, 96, 03—05, 07; *Д. Трошин* (Загорск) 96; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 03—05, 07; *А. Фридлянд* (Саратов) 93—95; *А. Харламов* (Киев) 96; *А. Холод* (Бердянск) 93—95, 97, 03—05, 07; *Р. Храбров* (Северодвинск) 93—95, 03—05, 07; *А. Христиченко* (Краматорск) 93, 94, 96; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 94, 96, 97; *Л. Чернышев* (Москва) 04, 05; *А. Чистый* (Брест) 96; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 93—97, 06; *С. Чупакин* (Ростов) 03, 05, 07; *Е. Шагаров* (Грозный) 93, 96, 03, 04, 07; *А. Шагинян* (Ростов) 97; *Г. Шаповалов* (Киев) 05—07; *С. Шаракин* (Солигорск) 03, 04, 06; *А. Шехтер* (Бельцы) 93, 95—97, 03—05, 07; *С. Шинкевич* (Березники) 93—97, 99—01, 03—07; *А. Шнайдман* (Киев) 96, 03—05; *А. Шпагин* (Мариуполь) 94; *И. Шуляк* (Киев) 94, 96, 00, 03—07; *К. Шурунов* (Куйбышев) 93, 94, 03—05, 07; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 93, 96, 03—05; *М. Энтин* (Тула) 94—07; *И. Яковлев* (Москва) 05, 06; *А. Яремчук* (Артемовский) 93, 05.

Вниманию наших читателей

Магазин № 1 «Академкнига» г. Уфы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Абрамов С. А., Зима Е. В. *Начала информатики*. (Б-чка программиста). — 1989. — 1 р.

Калужнин Н. А., Сушанский В. И. *Преобразования и перестановки*. (Проблемы науки и технического прогресса). — 1985. — 55 к.

Кибернетика. Микрокалькуляторы в играх и задачах. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1986. — 55 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1989. — 80 к.

Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1988. — 45 к.

Котов Ю. В. *Как рисует машина*. — 1988. — 60 к.

Левинштейн М. Е., Симин Г. С. *Барьеры*. (От кристалла до интегральной схемы). (Б-чка «Квант»). — 1987. — 75 к.

Меледин Г. В. *Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями*. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. — 1989. — 50 к.

Попов Е. П. *Робототехника и гибкие производственные системы*. (Проблемы науки и технического прогресса). — 1987. — 65 к.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии*. (Б-чка математического кружка). — 1989. — 75 к.

Простое и сложное в программировании. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1988. — 35 к.

Силин А. А. *Трение и мы*. (Б-чка «Квант»). — 1987. — 35 к.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Перспективы. Проблемы*. (Наука и технический прогресс). — 1988. — 70 к.

Эксперимент на дисплее. Первые шаги вычислительной физики. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1989. — 80 к.

Заказы направляйте по адресу: 450059, Уфа, ул. Р. Зорге, 10, магазин № 1 «Академкнига».

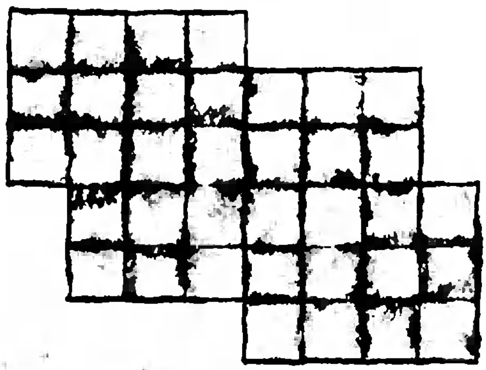
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Некий торговец каждый год увеличивал на одну треть свое состояние, уменьшенное на сто фунтов стерлингов, которые он ежегодно затрачивал на свою семью. Через три года торговец обнаружил, что его состояние удвоилось. Сколько денег было у торговца в начале?

2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Разрежьте фигуру на рисунке по линиям клеток на четыре равные фигуры.



4. Какое четырехзначное число обладает такими свойствами: оно само квадрат целого числа и числа, образованные первыми двумя цифрами и последними двумя цифрами,— также полные квадраты?

5. Гулливер во время пребывания в Лапуте интересовался денежной системой этой страны. Ему рассказали, что в стране используются монеты в 1, 2 и 4 лапти, сделанные из чистого золота. Монеты круглые, причем если положить монету в 1 лаптю на монету в 2 лапти так, чтобы ее край проходил через центр двухлаптевой монеты, то точки пересечения краев монет лежат на диаметре однолаптевой монеты. То же соотношение размеров у монет в 2 и 4 лапти. Веса монет пропорциональны их номиналам. Толщина однолаптевой монеты — 1 мм. Какова толщина остальных монет?

Задача 1 принадлежит великому английскому математику и физику И. Ньютону; остальные задачи нам предложили Н. Антонович, В. Вьюн, А. Бабоян, А. Савин.

ИСКУСНЕЕ КОЛУМБА

Я. ПЕРЕЛЬМАН

«Христофор Колумб был великий человек,— писал один школьник в своем классном сочинении.— Он открыл Америку и поставил яйцо». Оба подвига казались юному школьнику одинаково достойными изумления. Напротив, американский юморист Марк Твен не видел ничего удивительного в том, что Колумб открыл Америку: «Было бы удивительно, если бы он не нашел ее на месте».

А я осмеливаюсь думать, что не многого стоит второй подвиг великого мореплавателя. Вы знаете, как Колумб поставил яйцо? Попросту придавил его к столу, сломав скорлупу в нижней части. При этом он, разумеется,

изменил форму яйца. А как поставить яйцо, не меняя его формы? Этой задачи отважный моряк так и не решил.

Между тем это несравненно легче, чем открыть Америку и даже самый крошечный островок. Укажем вам три способа: один — для вареных яиц, один — для сырых, третий — для тех и других.

Чтобы поставить вареное яйцо, достаточно закрутить его пальцами одной руки или между ладонями рук как кубарь: яйцо завертится стоймя и будет сохранять такое положение до тех пор, пока вертится. После двух-трех проб опыт удается довольно легко.

Поставить указанным способом сырое яйцо нельзя; сырые яйца, как вы, вероятно, уже заметили, вертятся плохо. В этом состоит, между прочим,

---

Перепечатывается из книги Я. И. Перельмана «Для юных физиков», изданной в 1929 году.

безошибочный способ отличить, не ломая скорлупы, вареное яйцо от сырого. Жидкое содержимое сырого яйца не увлекается в такое же быстрое вращение, как скорлупа, и поэтому сильно тормозит его. Приходится искать другой способ ставить яйца. Способ этот существует. Надо сильно взболтать яйцо несколько раз: при этом желток разрывает свою нежную оболочку и разливается внутри яйца. Если затем вы поставите яйцо на его тупой конец и подержите в таком положении некоторое время, то желток — более тяжелый, нежели белок,— стечет вниз яйца и там соберется. Благодаря этому центр тяжести яйца опустится ниже, и яйцо приобретет бо́льшую устойчивость, нежели не подвергнутое такой обработке.

Наконец, есть третий способ поставить яйцо. Яйцо ставят, например, на пробку закупоренной бутылки, а на него помещают пробку с воткнутыми в нее двумя вилками. Вся эта «система» (как выразился бы физик) довольно устойчива и сохраняет равновесие даже при осторожном наклонении бутылки. Но почему же пробка и яйцо не падают? По той же причине, почему не падает карандаш, отвесно поставленный на конец, если в него воткнуть перочинный нож. «Центр тяжести системы лежит ниже точки опоры»,— пояснил бы физик. Это значит, что точка, к которой приложена сила тяжести, расположена ниже того места, на которое система опирается. Вы можете испытать этот закон равновесия на многих примерах, соединяя предметы так, чтобы тяжелые части были ниже точки опоры: предметы будут устойчиво держаться в самых непривычных для глаза положениях.

Итак, в искусстве ставить яйца вы обладаете тремя преимуществами перед Колумбом. В деле же открытия новых материков у него перед вами всего одно преимущество: только то, что он открыл Америку.

Сети Чебышева

(Начало см. на с. 24)

M и N — лежат на построенной поверхности, причем пары точек (K, L) и (N, M) лежат на двух кривых одного, а пары (K, N) и (L, M) — на двух кривых другого семейства, образующих сети. При этом

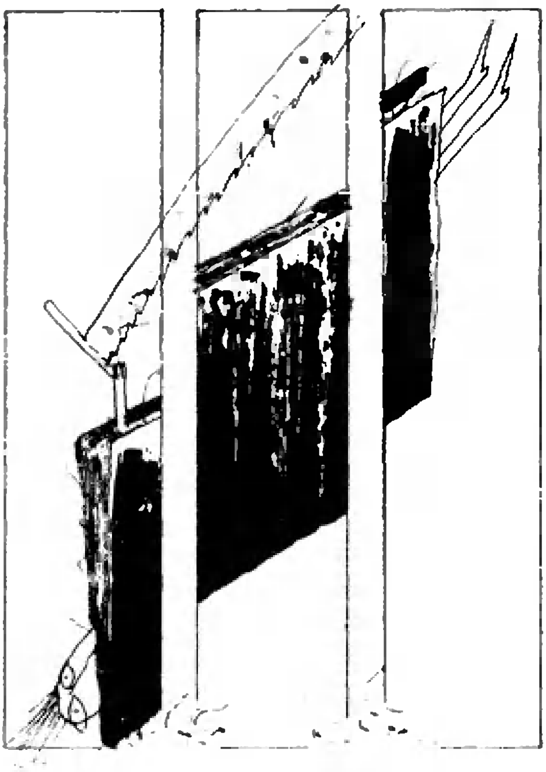
$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{NM} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{KN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{LM}.$$

Значит, кривая сети NM получается из кривой KL сдвигом в пространстве на вектор $\overrightarrow{KN}$, а кривая LM — сдвигом кривой KN на вектор $\overrightarrow{KL}$. Поэтому их длины равны, что и требуется.

В качестве упражнения предлагаем вам убедиться, что поверхность на рисунке 7 получается параллельным переносом в пространстве кривой одного из семейств сети вдоль кривой другого семейства. Поэтому то, что получается, называется *поверхностью переноса*. Предлагаем вам также убедиться, что если кривые m и n лежат в одной плоскости, то построенная сеть Чебышева совпадет с сетью, изображенной на рисунке 5.

Мы познакомили вас с некоторыми задачами, связанными с такой простой вещью, как обычная ткань. О других — рассказано в статье «Текстильная геометрия» в этом номере журнала.



Школа в „Кванте"

В этом разделе мы обычно публикуем небольшие заметки для учащихся 9—11 классов. В заметках разъясняются наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса или предлагаются дополнительные интересные материалы.

Приводим полный список статей раздела «Школа в «Кванте» (в скобках указаны номер журнала и последние цифры соответствующего года).

Математика

9 класс

10 класс

11 класс

Физика

9 класс

Механика

«Формулы кинематики для вращательного движения» (11—83),
«Кинематика вращательного движения» (11—86),
«Как решается основная задача механики?» (2—84),
«Инерция и инертность» (11—85),
«Как «открыть» второй закон Ньютона?» (11—84),
«Какой из трех законов Ньютона важнее?» (1—85),
«О законах Ньютона и «свободе воли» (5—89),
«Закон всемирного тяготения» (11—87),
«Как зависит g от глубины?» (3—90),
«Вращение Земли и ускорение свободного падения» (1—84),
«Об одной удивительно живучей ошибке» (1—88),
«Сила и деформация» (12—83),
«Что произойдет, если исчезнет трение?» (5—90),
«Вязкое трение» (3—87),
«О швартовке, трении и формуле Эйлера» (5—88),
«Равнодействующая — как ее найти?» (11—12—88),
«Когда к телу приложены параллельные силы» (2—85),
«Конус трения» (1—86),
«О простых машинах» (4—85),
«Закон Архимеда» (1—87),
«О судьбе некоторых понятий механики» (5—86),
«Что такое центр масс» (3—88),
«Почему не скользит мешок?» (5—89),
«Работа, энергия и архимедова сила» (3—84),
«Импульс и кинетическая энергия» (5—85),
«Закон сохранения энергии» (5—88),
«Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений» (1—89),
«Вторая космическая скорость» (3—86),
«Столкновения тел» (4—84),
«Законы сохранения и системы отсчета» (5—87),
«Закон Бернулли» (5—84),
«О законе колебательного движения» (9—83),
«Гармонические колебания. Сложение колебаний» (9—84),
«Гармонические колебания и равновесие» (9—87),
«Уравнение волны» (11—84),
«О музыкальных звуках и их источниках» (9—85),
«Энергия и громкость звука» (12—83),
«Физика музыкальной гармонии» (5—87).

10 класс

Молекулярная физика. Тепловые явления

«Простой способ определения размеров молекул» (9—83),
«Масса и количество вещества, *или* Об одной «ошибке» Ньютона» (10—84),
«Силы молекулярного взаимодействия» (1—87),
«Абсолютная температура» (9—88),
«Давление идеального газа» (10—83),
«Давление газа в сосуде» (9—87),
«Температура. Теплота. Теплоемкость» (11—83),
«Расширение газа в пустоту» (11—87),
«Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины» (9—85),
«Тепловой насос» (11—86),
«Физический смысл универсальной газовой постоянной» (10—83),
«Реальный газ и его уравнение состояния» (11—12—88),
«Об агрегатных состояниях вещества» (9—84),
«О явлениях переноса» (9—86),
«Газ превращается в жидкость» (11—84),
«О силах поверхностного натяжения» (12—83),
«Сколько бывает состояний у вещества?» (1—89),
«Симметрия и физические свойства кристаллов» (11—89).

Основы электродинамики

«Два вида электричества» (1—84),
«Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы» (2—84),
«Проводники в электростатическом поле» (1—88),
«Электрический диполь и его электрический момент» (11—85),
«Энергия электрического поля» (5—86),
«Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики» (12—84),
«Метод электростатических изображений» (3—87),
«Силовые линии и теорема Гаусса» (3—90),
«Как в металле протекает электрический ток?» (3—88),
«Первый источник электрического тока» (1—86),
«Об электрическом сопротивлении проводников» (5—90),
«Правила Кирхгофа» (1—85),
«О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» (2—85),
«Открытие электрона» (3—85),
«Компьютер — в холодильнике?!» (5—90),
«Магнитный момент тока» (3—86),
«Электрическое и магнитное поля» (3—84),
«Диа- и парамагнетики» (4—85),
«Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях» (4—84),
«Сила Лоренца и эффект Холла» (3—89),
«Полярные сияния» (5—89),
«Правило Ленца» (5—88),
«Электромагнитная индукция и принцип относительности» (11—87),
«Токи смещения» (5—84),
«Как работает электродвигатель?» (5—87),
Скин-эффект (5—85).

11 класс

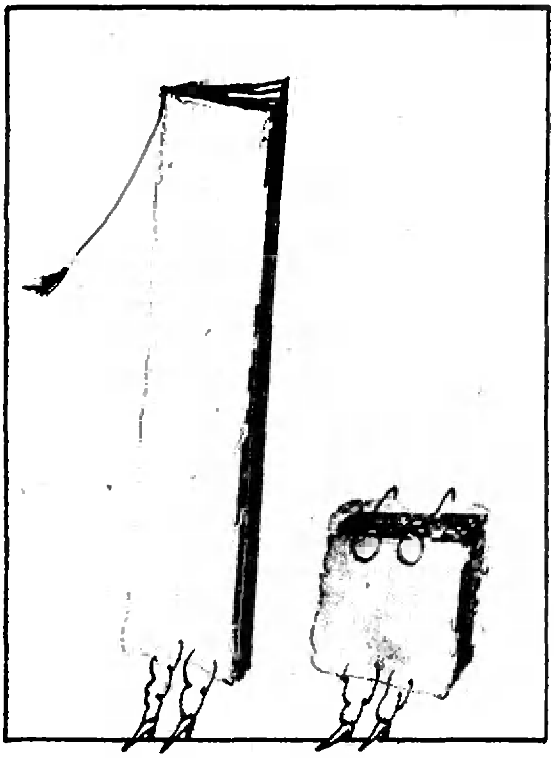
Колебания и волны

«Электрические колебания. Колебательный контур» (11—83),
«Что такое параметрический резонанс» (9—86),
«Принцип Гюйгенса» (11—12—88),
«Постоянный и переменный электрический ток» (10—84),
«Модуляция и модуляторы» (9—89).

Оптика

«Принцип Ферма» (1—84),
«Номограммы в геометрической оптике» (11—86),
«Интерференция и интерферометры» (1—88),

(Окончание см. на с. 57)



Практикум абитуриента

При подготовке к вступительным экзаменам в вуз полезно познакомиться с теми материалами, которые уже были опубликованы в разделе «Практикум абитуриента» в прошлые годы. Ниже приводится тематический список таких статей по математике и физике, напечатанных в «Кванте» начиная с сентября 1986 года (в скобках указаны номер журнала и последние цифры соответствующего года).

Математика

Алгебра и анализ

«Задачи на координатной плоскости» (11—86),
«Функции периодические и непериодические» (9—87),
«Неравенства и графики» (4—86),
«Решения нестрогих неравенств» (6—88),
«Тригонометрия помогает алгебре» (5—89),
«Текстовые задачи» (3—90),
«Метод интервалов» (5—90).

Тригонометрия

«Решение систем тригонометрических уравнений» (11—87).

Планиметрия

«Правильное решение геометрической задачи» (5—87),
«Геометрические решения негеометрических задач» (11—89).

Стереометрия

«Вычисление расстояний и углов» (1—87),
«Стереометрические задачи с шарами» (2—88),
«Из геометрии тетраэдра» (9—88),
«Теорема о трех синусах» (9—89).

Физика

Механика

«Маневрирование в космосе» (2—87),
«О графическом способе решения некоторых физических задвч» (4—87),
«Кинематические связи в задачах динамики» (2—88),
«Статика» (2—89),
«Законы сохранения энергии и импульса» (4—89),
«Системы отсчета в задачах механики» (2—90).

Молекулярная физика. Тепловые явления

«Задачи на газовые смеси» (6—87),
«Поверхностное натяжение и капиллярные явления» (4—88),
«Парообразование. Свойства паров» (6—88).

Основы электродинамики

«Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин» (10—87),
«Расчет электрических цепей» (8—88),
«Закон сохранения энергии в электростатике» (6—89),
«Мощность в цепи постоянного тока» (8—89),
«Электрические машины постоянного тока» (1—90),
«Переходные процессы в электрических цепях» (4—90),
«Явление самоиндукции» (6—90).

Колебания и волны

«Цепи переменного тока» (9—86),
«Гармонические колебания» (11—12—88).

Оптика

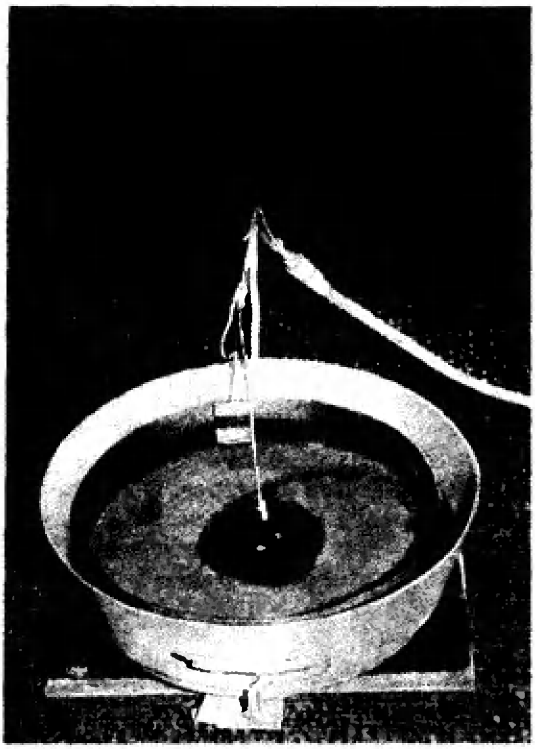
«Оптические приборы» (10—86),
«Преломление света» (10—88),
«Об увеличении изображения» (10—89).

Квантовая физика

«Атомная физика в задачах» (12—86).

Некоторые общие вопросы

«Работа, энергия, тепло» (8—87),
«Уравнения думают за нас» (12—87),
«Метод графических оценок» (12—89).



Лаборатория „Кванта"

Вращающаяся жидкость

П. МИХЕЕВ

В Мэрилендском университете, расположенном недалеко от столицы США, есть удивительный музей, в котором выставлена большая коллекция... физических опытов. Можно часами рассматривать экспонаты, изучать различные механизмы, нажимать кнопки, приводящие их в действие, просто смотреть и удивляться. Вот один пример.

Автор этой статьи Павел Михеев — один из пятнадцати советских школьников, принимавших участие в первой советско-американской летней физико-математической школе (июль 1989 г., США).

Перед вами плоская тарелка с металлическим ободком. Тарелка заполнена голубой жидкостью. В центре сосуда — проводок. Казалось бы, ничего особенного, кроме того, что жидкость в тарелке... вращается. Может быть, это какая-то особенная жидкость?

Заинтересовавшись увиденным, мы присмотрелись повнимательнее к «установке», а вернувшись домой, изготовили ее в школьном физическом кабинете.

Посмотрите на приведенную здесь фотографию. Стеклянные стенки сосуда изнутри оклеены металлической полоской (фольгой), в центр сосуда помещен металлический стержень. Провода, подключенные к стержню и фольге, идут к источнику тока, в качестве которого мы использовали выпрямитель, дающий на выходе напряжение порядка 9 В при токе 0,3 А. Голубая жидкость, наполняющая сосуд,— это 5—10-процентный раствор медного купороса в воде. (Можно использовать и другие электролиты, например — тоже водный раствор, но хлористого натрия.) Сосуд поставлен на постоянный магнит, создающий в непосредственной близости от своей поверхности магнитное поле с индукцией около 10^{-3} Тл. Вот и все оборудование.

Подключив электроды (стержень и фольгу) к источнику электрического тока, мы действительно наблюдали вращение жидкости в сосуде. Вращение было не очень быстрым, но вполне заметным глазу. Попробуем дать объяснение увиденному.

Молекулы $CuSO_4$ в воде диссоциируют на ионы Cu^{2+} и SO_4^{2-}. При подключении электродов к источнику в сосуде возникает электрическое поле, направленное по радиусам от центра сосуда к его периферии (если стержень служит анодом, а фольга — катодом). Ионы меди и кислотного остатка начинают перемещаться к соответствующим электродам, а магнитное поле, направленное вертикально (и практически однородное вблизи поверхности магнита), заставляет ионы искривлять свои траектории, что и приводит к вращению всей жидкости. Вот вся качественная сторона явления.

Теперь сделаем некоторые количественные оценки.

Сначала поговорим о радиальной составляющей скорости ионов v_R. Как известно, плотность тока в электролите представляет собой сумму плотностей, создаваемых ионами обоих знаков:

$$j = n_+ q v_+ + n_- q v_-,$$

где n_+ и n_- — концентрации положительных и отрицательных ионов соответственно (понятно, что в нашем случае они равны, т. е. $n_+ = n_- = n$), q — абсолютная величина заряда каждого иона, v_+ и v_- — скорости их упорядоченного движения. Для оценки будем считать, что эти скорости одинаковы для обоих ионов: $v_+ = v_- = v_R$. Поскольку сила тока I связана с плотностью j соотношением $I = jS$, где $S = 2\pi Rh$ (R — радиус сечения сосуда, h — высота жидкости в сосуде) — площадь катода, получим

$$I = (2nqv_R)(2\pi Rh) = 4\pi nqRhv_R.$$

Концентрация ионов

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{\mathrm{M}} N_A \frac{1}{\pi R^2 h},$$

где m — масса медного купороса, М — его молярная масса, N_A — постоянная Авогадро. Заряд ионов $q = 2e$ (e — заряд электрона). Тогда получим

$$I = 4\pi \frac{mN_A}{\mathrm{M}\pi R^2 h} 2eRhv_R, \text{ и } v_R = \frac{\mathrm{M}IR}{8emN_A}.$$

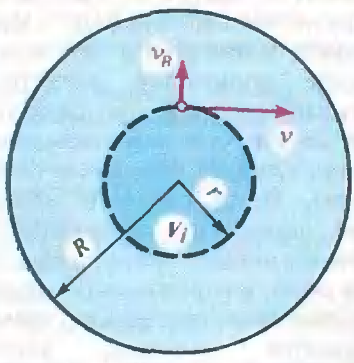


Рис. 1.

Приняв $\mathrm{M} = 0{,}064$ кг/моль, $q = 3{,}2 \times 10^{-19}$ Кл, $m \sim 0{,}01$ кг, $R \sim 0{,}1$ м и $I = 0{,}3$ А, найдем величину радиальной составляющей скорости движения ионов:

$$v_R \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}.$$

На движущуюся частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, роль которой сводится к искривлению траектории ионов, что и вызывает вращение всей жидкости. Но между слоями движущейся жидкости всегда действуют силы сопротивления, называемые силами вязкого трения. Они стремятся затормозить тот слой, который движется быстрее, и ускорить тот, который движется медленнее. Действие этих двух сил — силы Лоренца и силы вязкого трения — приведет к тому, что очень скоро после начала вращения касательная составляющая v_r скорости на расстоянии r от центра практически перестанет изменяться с течением времени. А чему она будет равна? Сделаем оценку.

Рассмотрим ограниченный объем жидкости V_i (рис. 1). На заряд, находящийся в этой области, действует сила Лоренца

$$F_{\text{л}i} = q_i B v_R,$$

где

$$q_i = 2qnV_i = 2qn\pi r^2 h.$$

А что можно сказать о силе вязкого трения? Из самых общих соображений, а также из нашего опыта очевидно, что максимальная касательная скорость частиц достигается у оси вращения, а по мере увеличения расстояния r величина скорости плавно уменьшается. Поскольку сила вязкого трения обусловлена различием скоростей движения соседних слоев, то понятно, что она должна зависеть от того, насколько быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою, в нашем случае — по мере увеличения расстояния от центра сосуда, и от площади соприкосновения. Таким образом:

$$F_{\text{тр}i} = -\eta \frac{dv_r}{dr} S_i,$$

где η — так называемый коэффи-

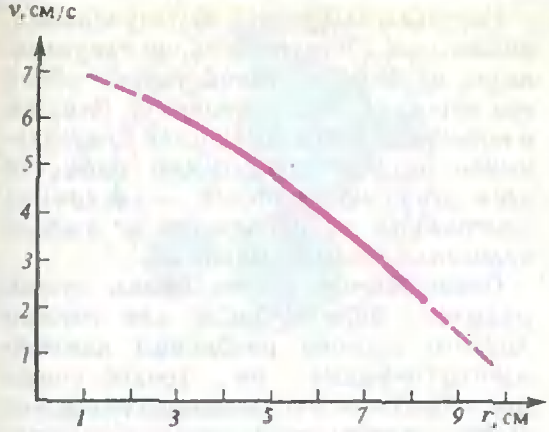


Рис. 2.

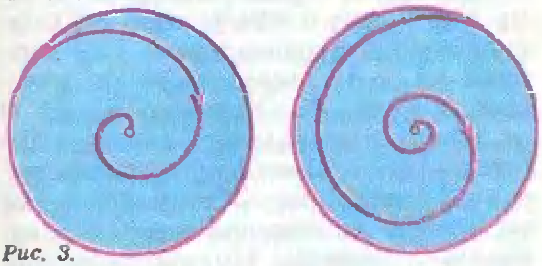


Рис. 3.

циент вязкости жидкости, характерный для каждой жидкости, $S_i = 2\pi rh$ — площадь соприкосновения соседних слоев.

Как было уже сказано, *касательная* составляющая скорости v_r в каждой точке сосуда перестанет меняться со временем, если

$F_{Л} = F_{тр}$, или $\frac{BI}{2R}r^2 = -\eta\frac{dv_r}{dr}2\pi hr.$

Мы получили дифференциальное уравнение

$$dv_r = -\frac{BI}{4\pi Rh\eta}r\,dr.$$

Решим его:

$$v_r = -\frac{BIr^2}{8\pi Rh\eta} + C.$$

Константу C определим из условия, что при $r \to R$ $v_r \to 0$:

$$C = \frac{BIR}{8\pi h\eta}.$$

Тогда получим

$$v_r = \frac{BI}{8\pi Rh\eta}(R^2 - r^2).$$

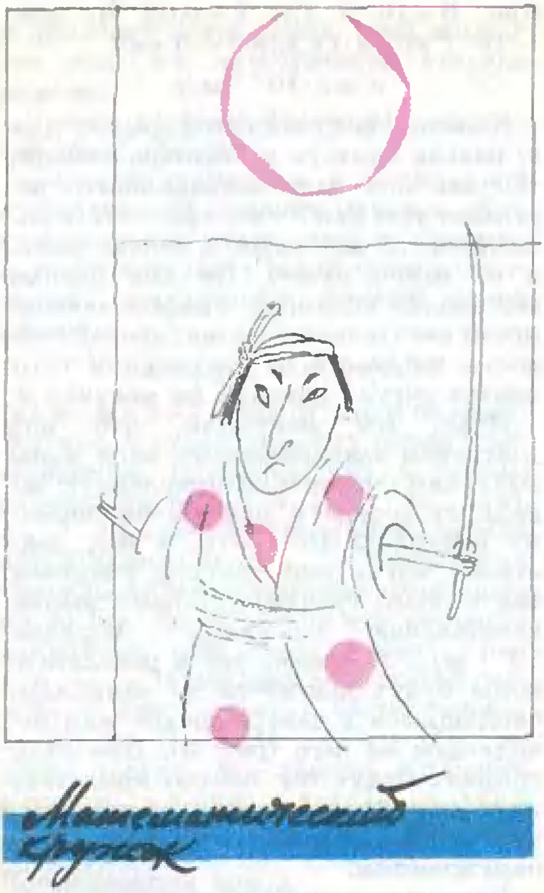
При $B \sim 10^{-3}$ Тл, $h \sim 0{,}02$ м, $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с) для $r = 5$ см

$$v_r \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Конечно, полученную формулу для v_r нельзя считать достаточно точной, так как она дает неправильный результат уже при $r \to 0$ и при $r \to R$ (в последнем случае скорость только мала, а не равна нулю). Но для оценки это вполне *подходит. График зависимости касательной составляющей скорости жидкости от расстояния* r от центра сосуда показан на рисунке 2.

Итак, мы получили, что *под действием электрического поля ионы получают скорость, направленную по радиусу сосуда и равную по порядку величины* 10^{-7} *м/с, а под действием магнитного поля (с участием сил вязкого трения) устанавливается касательная скорость порядка* 10^{-2} *м/с*. Понятно, что в результате ионы будут двигаться по спиралям, сходящимся в центре сосуда или исходящим *из него (рис. 3)*. При этом спирали будут так плотно прилегать друг к другу, что нам будет казаться, что слои жидкости движутся по окружностям.

Наверное, возможны и другие условия эксперимента, и соответственно другие способы оценки наблюдаемого явления. Иными словами, у каждого, кто заинтересуется этим опытом, есть достаточно возможностей для самостоятельного творчества.



Старая японская теорема

Р. ХОНСБЕРГЕР

Предлагаем вам перевод небольшого отрывка из замечательной книги Росса Хонсбергера «Математические жемчужины». Мы надеемся, что в скором времени эта книга появится на прилавках книжных магазинов.

У японских математиков существует древний обычай: они записывают свои открытия на дощечках, которые потом вывешивают в храмах — во славу богов и в честь авторов этих открытий. (Об этом рассказал Роджер Джонсон в своей книге «Расширенная геометрия Евклида».)

В 1800 году в одном из японских храмов на дощечке появилась прекрасная теорема:

Разобьем выпуклый многоугольник, вписанный в окружность, на треугольники, проведя из какой-нибудь одной его вершины все диагонали. Впишем в каждый из получившихся треугольников окружность. Сумма радиусов всех этих окружностей — величина постоянная, не зависящая от выбора вершины многоугольника.

Оказывается, та же самая сумма радиусов получается и для любого другого способа разбиения данного многоугольника на треугольники (рис. 2). Ниже мы увидим, что обе эти задачи легко решаются с помощью удивительной теоремы Л. Карно (1753—1823).

Прежде чем формулировать теорему Карно, кое о чем условимся. Опишем вокруг произвольного треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром O (рис. 3). Конечно, точка O не всегда принадлежит самому треугольнику. Поэтому, рассматривая расстояние OO_i ($i=1$, 2, 3) от точки O до стороны треугольника, разумно считать, что эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. Будем считать, что расстояние OO_i отрицательно в том и только в том случае, когда отрезок OO_i *целиком* лежит *вне* треугольника (рис. 4). Такое «правило знаков» обеспечивает нам то, что «сумма» площадей (с соответствующими знаками) треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 всегда оказывается равной площади треугольника $A_1A_2A_3$.

Теорема Карно утверждает*):

*) Доказательство теоремы Карно см. в комментарии редакции.

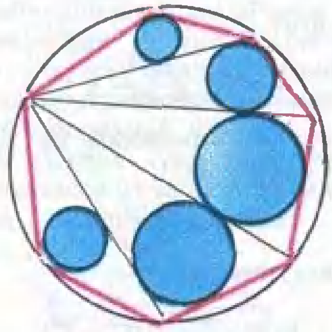


Рис. 1.

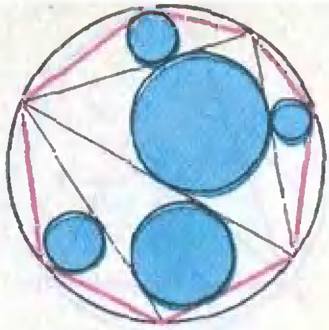


Рис. 2.

Сумма расстояний от центра окружности, описанной вокруг треугольника, до сторон треугольника, равна сумме радиусов описанной и вписанной в него окружностей, т. е. $OO_1+OO_2+OO_3=R+r$, где R — радиус описанной, а r — радиус вписанной в треугольник окружности.

Вернемся к нашей «жемчужине» — к теореме о вписанном многоугольнике, разбитом на треугольники. Перенумеруем эти треугольники, и пусть r_i — радиус окружности, вписанной в треугольник с номером i, а OO_1^i, OO_2^i, OO_3^i — расстояние от центра O большой окружности до сторон i-го треугольника. Тогда по теореме Карно $r_i+R=OO_1^i+OO_2^i+OO_3^i$. Поэтому интересующую нас сумму радиусов r_i можно записать так:

$$S=(OO_1^{(1)}+OO_2^{(1)}+OO_3^{(1)})+(OO_1^{(2)}+OO_2^{(2)}+OO_3^{(2)})+\ldots-R-R-\ldots-R.$$

Число треугольников, на которые разбит наш многоугольник, не зависит от способа разбиения, точнее, при любом разбиении выпуклого n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники, получается $(n-2)$ треугольника. Поэтому величина $-R-R-\ldots-R$, входящая в сумму S, одна и та же для всех разбиений, а именно $(2-n)R$. Остается только показать, что для всех способов разбиения одинакова сумма

$$S'=(OO_1^{(1)}+OO_2^{(1)}+OO_3^{(1)})+\ldots+(OO_1^{(n-2)}+OO_2^{(n-2)}+OO_3^{(n-2)}).$$

Но это делается в одну минуту.

Рассмотрим произвольную диагональ PQ. Она является общей стороной двух треугольников разбиения (рис. 5). *При этом* перпендикуляр OO' обязательно оказывается лежащим целиком вне одного из этих треугольников. Так что вклад в сумму S' от всех таких «расстояний» будет нулевым, *поскольку* расстояние OO' входит в сумму S' дважды, но один раз — со знаком плюс, а второй раз — со знаком минус. *Таким образом*, сумма S' равна просто сумме длин всех перпендикуляров из точки O к сторонам данного многоугольника. Ясно, что эта величина постоянна.

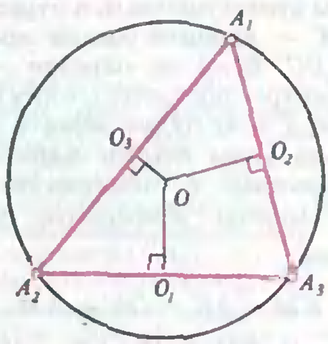


Рис. 3.

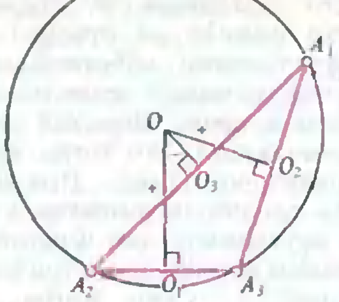


Рис. 4.

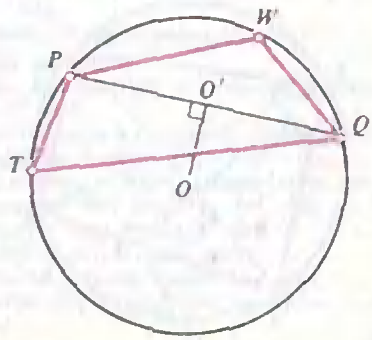


Рис. 5.

От редакции. Лазар Карно, на теорему которого ссылается Р. Хонсбергер, известен в мире не столько своими математическими работами, сколько яркой политической деятельностью во Франции в эпоху Великой французской революции. Его тогда называли «организатором побед». При Наполеоне он был военным министром и министром внутренних дел Франции.

Физикам хорошо известно имя сына Л. Карно — Сади Карно, одного из основателей термодинамики.

Теорема Л. Карно сама является великолепной математической жемчужиной, и мы не могли не привести здесь ее доказательства. Самое изящное из известных доказательств теоремы Л. Карно опирается на теорему Птолемея, жившего в Александрии (Египет) во 2 веке нашей эры и прославившегося в первую очередь своими астрономическими трудами. Им была создана геоцентрическая система мира, которая являлась общепризнанной до появления трудов Коперника. В отличие от Карно, о жизни Птолемея практически ничего не известно.

Теорема Птолемея звучит так:

Произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равняется сумме произведений длин противоположных сторон этого четырехугольника.

Доказывается она, например, таким образом:

Выберем на диагонали AC точку E так, чтобы угол ABE равнялся углу DBC (рис. 6). Тогда треугольники ABE и DBC окажутся подобными, так как их углы при вершине B равны по построению, а углы при вершинах A и D лежат на одной окружности и опираются на дугу BC.

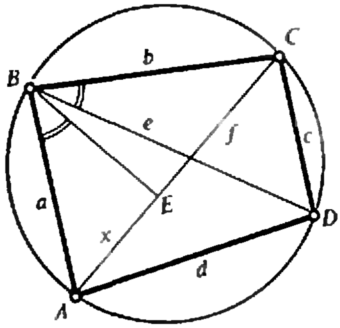


Рис. 6.

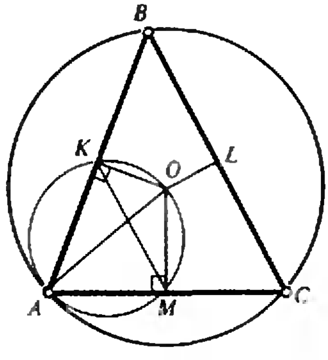


Рис. 7.

Если обозначить длины сторон через a, b, c, d, длины диагоналей через e и f (рис. 6), а длину отрезка AE через x, то из подобия этих треугольников следует, что

$$a/x=e/c, \text{ или } ac=ex.$$

Аналогичным образом подобны треугольники ABD и EBC. У них углы при вершине B равны по построению, а углы при вершинах D и C опираются на дугу AB. Из подобия следует, что

$$e/d=b/(f-x), \text{ или } bd=ef-ex.$$

Но $ex=ac$, следовательно, $bd=ef-ac$, т. е.

$$ef=ac+bd.$$

Теорема Птолемея доказана. Перейдем к доказательству теоремы Карно. Пусть ABC — рассматриваемый треугольник (рис. 7), центр O описанной окружности лежит внутри него, а точки K, L и M соответственно середины сторон AB, BC и AC. По построению, отрезки OK, OL и OM перпендикулярны этим сторонам, а отрезки KL, LM, KM — средние линии треугольника ABC. Если на отрезке AO как на диаметре построить окружность, то точки K и M будут лежать на ней, поскольку углы AKO и AMO — прямые. Поэтому к четырехугольнику $AKOM$ можно применить теорему Птолемея:

$$AO\cdot KM=AK\cdot OM+AM\cdot KO.$$

Но $AO=R$, $KM=a/2$, $AK=c/2$, $AM=$

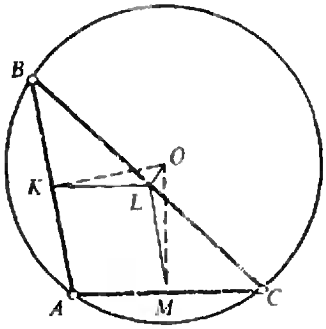


Рис. 8.

$=b/2$. Поэтому это равенство можно переписать так:

$$a\cdot R/2=c\cdot OM/2+b\cdot KO/2.$$

Рассматривая аналогично четырехугольники *BLOK* и *CMOL*, получим еще два равенства:

$$b\cdot R/2=b\cdot OL/2+a\cdot OK/2,$$
$$c\cdot R/2=b\cdot OL/2+a\cdot OM/2.$$

Добавим еще одно очевидное равенство (r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности):

$$(a+b+c)\cdot r/2=a\cdot OL/2+ +b\cdot OM/2+c\cdot OK/2.$$

Сложив теперь последние четыре равенства, получим:

$$(a+b+c)\cdot (R+r)/2=(a+b+c)\times \times(OM+OK+OL)/2,$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы Карно.

Если треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом A (рис. 8), то вместо написанных нами четырех равенств следует написать следующие:

$$\frac{a\cdot R}{2}=\frac{c\cdot OM}{2}+\frac{b\cdot OK}{2},$$

$$\frac{a\cdot OK}{2}=\frac{c\cdot OL}{2}+\frac{b\cdot R}{2},$$

или

$$\frac{b\cdot R}{2}=\frac{a\cdot OK}{2}-\frac{c\cdot OL}{2},$$

$$\frac{a\cdot OM}{2}=\frac{b\cdot PO}{2}+\frac{c\cdot R}{2},$$

или

$$\frac{c\cdot R}{2}=\frac{a\cdot OM}{2}-\frac{b\cdot OL}{2},$$

$$\frac{(a+b+c)r}{2}=\frac{b\cdot OM}{2}+\frac{c\cdot OK}{2}-\frac{a\cdot OL}{2}.$$

Складывая эти четыре равенства, получаем:

$$\frac{(a+b+c)(R+r)}{2}=\frac{(a+b+c)}{2}\times \times(OK+OM-OL);$$

Это и есть утверждение теоремы Карно для тупоугольного треугольника.

Публикацию подготовил А. Савин

Школа в „Кванте"

(Начало см. на с. 48)

Есть идея?!

Идея есть, и не одна

В сентябрьском номере журнала за прошлый год нашим читателям было предложено решить такую задачу:

С океанского лайнера упала за борт древнегреческая статуя, имеющая большую художественную ценность. С помощью подводных телекамер удалось найти то место на большой глубине, где лежит, частично зарывшись в ил, статуя.

Необходимо поднять статую за довольно короткий срок (по прогнозам надвигается сильный шторм). Снаряжение водолазной экспедиции за такой срок невозможно. На борту лайнера имеются тросы и лебедки достаточной грузоподъемности. Оборудование для подведения тросов к статуе может быть сброшено на парашюте с самолета (его можно быстро вызвать с берега). Однако проблема в том, что статуя слишком деликатный груз: ее могут повредить тросы и крючья. Как быть?

Тех, кто возьмется за решение этой задачи, мы предупреждали: ни в коем случае не следует начинать поиск решения с хаотического перебора вариантов, выдумывать громоздкие приспособления. Прежде всего необходимо уяснить, что́ надо сделать, а потом уже рассуждать о том, с помощью какого известного вам физического эффекта можно достичь желаемого результата. Задача считается решенной, если найдена базовая идея, т. е. вы нашли тот самый физический эффект.

Так какие же идеи родились у наших читателей в связи с задачей «Статуя с морского дна»? Обратимся к письмам.

Многие предлагают для извлечения статуи использовать присоски. Вот что пишет Виктор Алтуев из Красноярска: «Лучше всего использовать присоски. Сила, с которой они будут прикрепляться к поверхности статуи, пропорциональна глубине, на которой находится статуя». Все верно, но Виктор не учел трех вещей: 1) статуя неровная, поэтому к ней нелегко прикрепить присоску так, чтобы она хорошо держалась; 2) статуя увязла в иле, а потому, когда ее начнут поднимать, под ней образуется разрежение, и сила гидростатического давления будет препятствовать извлечению статуи (вспомните «магдебургские полушария»); 3) по мере подъема статуи гидростатическое давление, прижимающее присоску к статуе, будет падать, и статуя может оторваться. Конечно, все эти препятствия преодолимы. Например, можно совершенствовать присоски, размывать ил одновременно с вытягиванием статуи, подхватить статую неводом где-нибудь на середине пути. Но все-таки это достаточно сложно.

В некоторых письмах предлагается использовать липучку для того, чтобы приклеить трос к статуе, и тогда не будет сложностей с ее извлечением. Что ж, неплохо. Но проблема возникает с последующим отделением липучки. Если бы ребята знали, что существуют электрореологические и магнитореологические жидкости, которые меняют свою вязкость вплоть до «затвердевания» соответственно в электростатическом и магнитном полях, то они вышли бы на вполне патентоспособное решение. Такие жидкости легко снимаются в отсутствие поля.

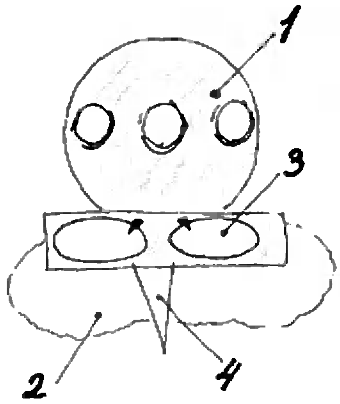
Дмитрий Коновалов из Петрозаводска предложил использовать жидкий металл для прикрепления троса к статуе: «Если подвести к статуе контейнер с припоем, расплавить металл с помощью нагревателя, то после застывания металла мы получим надежное соединение, благодаря которому вытащить статую из ила не составит труда». Надо отметить, что подобный метод подъема предметов с морского дна был недавно запатентован в Великобритании. Но согласитесь, что припой может повредить статую. И потом — из чего сделана статуя? Ведь припаять трос можно не к любому материалу.

Наиболее красивое решение, на наш взгляд,— это приморозить статую к захватному органу, опускаемому на тросе. В качестве источника холода могут быть использованы сжиженные газы или сухой лед, которые можно доставить спецрейсом самолета и спустить на парашюте. Такое решение предложили члены кружка «Юные изобретатели» из школы села Сепыч Верещагинского района Пермской области, А. Школьников (Москва), А. Скабелин (Барановичи) и многие другие ребята.

Самые обстоятельные ответы прислали Александр Чернов из Москвы и Андрей Волошин из Горького. Саша предложил примораживать статую к захвату с использованием жидкого азота, а получаемый при этом газообразный азот направлять для заполнения эластичных емкостей, используемых для поднятия статуи, как понтоны. Жидкий азот имеет при атмосферном давлении температуру кипения 77,3 К (или —195,7 °С). В окружающей статую воде (температура не менее 4 °С) жидкий азот будет активно испаряться, отбирая тепло у воды. Так что захват окажется «приклеенным» к статуе льдом. Андрей же остановился на сухом льде (т. е. твердом углекислом газе) и предложил наморозить льдину, которая всплывает, увлекая за собой статую. Сухой лед имеет температуру возгонки при атмосферном давлении 34 °С. Возгонка сухого льда будет сопровождаться охлаждением окружающей статую воды и формированием льдины.

Давайте обсудим оба эти проекта. В способе Саши Чернова имеется следующий недостаток: при подъеме увеличивается разность давлений между газом внутри емкостей и водой снаружи, что может привести к разрыву емкостей. Во избежание этого можно поставить клапан, который будет стравливать воздух по мере подъема статуи. Можно предложить и более красивое решение — вырезать отверстие внизу емкости, и по мере снижения гидростатического давления азот будет свободно выходить через него.

При использовании в качестве хладагента сухого льда, как предложил Андрей, возникнут трудности следующего поряд-



Батискаф, в котором используется выталкивающая сила льда. 1 — шар-гондола, 2 — намораживаемая «шуба» из льда, 3 — емкости с жидким газом (который может использоваться и для дыхания), 4 — полый стержень для примораживания ила со дна (жидкий воздух подается в стержень, и ил примерзает к нему).

ка. Так как удельная теплота плавления льда и теплота возгонки кристаллического углекислого газа сравнимы между собой, то для подъема статуи придется опускать под воду значительный объем сухого льда, а это дополнительные сложности.

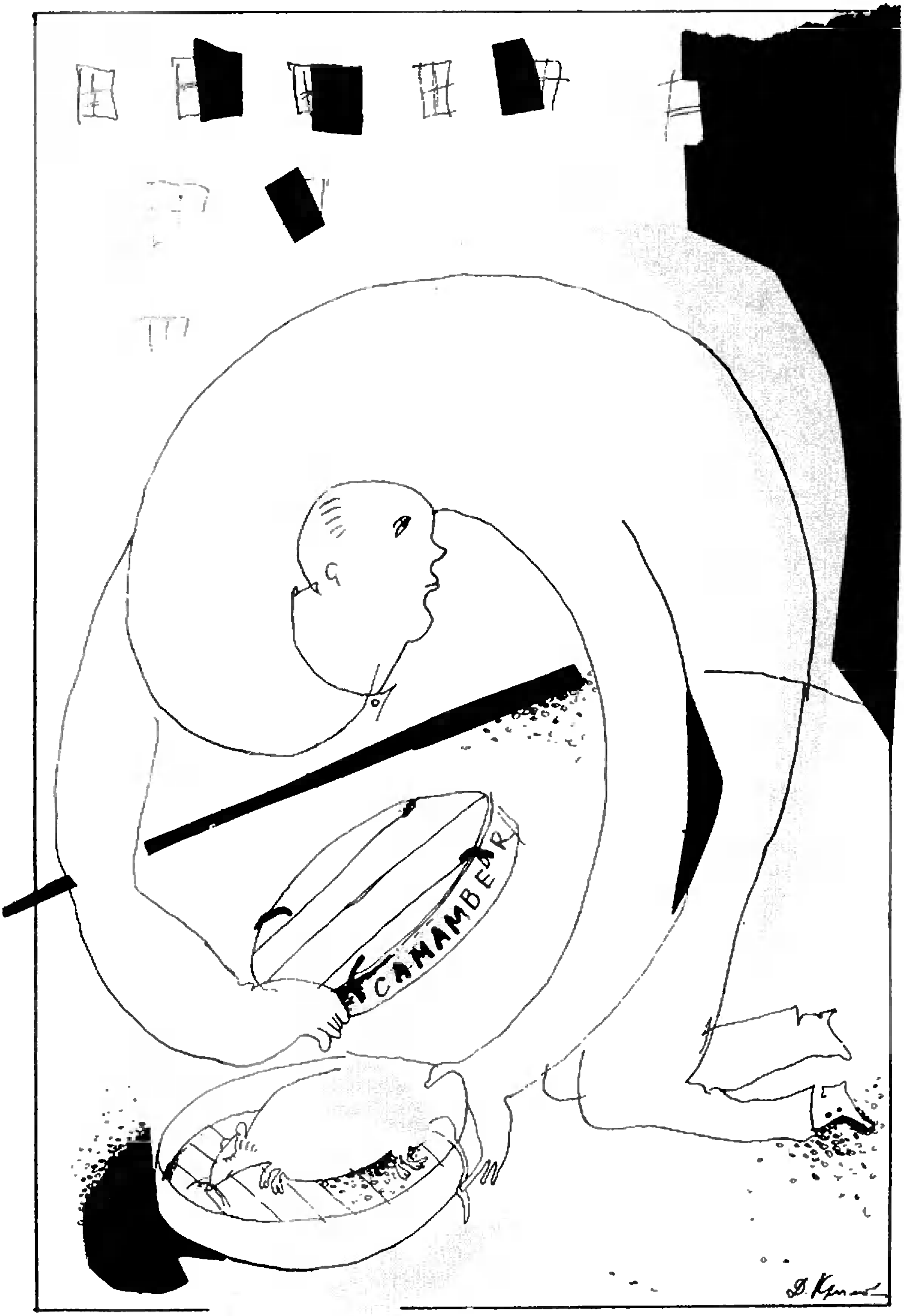
Теперь зададимся вопросом: а будет ли сухой лед на глубине испаряться? К сожалению, в школе слова «агрегатное состояние вещества зависит от температуры и давления» усваиваются механически, без должного осмысления. А напрасно. Критическое давление твердой углекислоты $p_к \sim 7{,}3$ МПа. Для замораживания воды необходима температура ниже 0 °С. Однако возгонка кристаллической углекислоты невозможна при давлениях бóльших $p_к$, т. е., начиная с глубины $h \sim 730$ м, сухой лед, испаряясь, не сможет охладить воду до температуры замерзания, и использование его в качестве хладагента становится бесполезным. Что же будет происходить? Сухой лед на этой глубине будет нагреваться как твердое тело и при нуле градусов будет еще твердым. Скрытая теплота испарения будет поглощаться. Так что, если статуя упала на глубину большую, чем 730 м, то бесполезно пытаться примораживать ее к захвату сухой углекислотой.

Но все же идея Андрея Волошина об использовании выталкивающей силы льда очень привлекательна. Мне лично представляется интересной конструкция батискафа с намораживаемым льдом.

Напомню, что традиционные батискафы снабжены балластом, который они сбрасывают при подъеме со дна. Подъемная сила создается емкостью с бензином. Бензин используется в связи с его малой сжимаемостью (интересно, что емкость открыта снизу, так как при таких давлениях нельзя считать бензин вовсе несжимаемой жидкостью).

Батискаф, в котором используется выталкивающая сила льда, может более свободно маневрировать (ведь в нем маневр не связан со сбросом балласта). В качестве хладагента лучше использовать жидкий кислород, который после испарения может быть использован и для питания двигательной установки батискафа. Традиционную конструкцию обычно снабжают манипулятором для взятия проб грунта со дна. Вы, наверное, уже догадались, что наша конструкция со льдом может обойтись без сложных захватных устройств манипулятора —

(Окончание см. на с. 69)


CAMAMBER

ЦВЕТЫ ДЛЯ ЭЛДЖЕРНОНА

(фантастический рассказ)

Д. КИЗ (США)

25 мая. Они сами кормят Элджернона, который теперь отказывается решать задачу с меняющимся замком. Все отождествляют меня с Элджерноном. В некотором смысле мы оба — первые. Все они делают вид, что поведение Элджернона не обязательно должно что-то означать в отношении меня. Но трудно скрыть тот факт, что некоторые из животных, которых подвергли тому же эксперименту, ведут себя странно.

Доктор Штраусс и доктор Немюр попросили меня больше не приходить в лабораторию. Я знаю, о чем они думают, но не могу с этим согласиться. Я не оставил своего намерения продвинуть вперед их исследования. При всем уважении к этим двум достойным ученым я прекрасно сознаю пределы их возможностей. Если существует какое-то решение, я должен буду найти его сам. Совершенно неожиданно фактор времени приобретает для меня огромную важность.

29 мая. В мое полное распоряжение отвели лабораторию и разрешили продолжать исследования. Что-то уже проясняется. Работаю круглые сутки. Мне поставили в лаборатории койку. Большая часть времени, отведенного мною для записей, уходит на заметки, которые я держу в отдельной папке, но иногда я по привычке ощущаю необходимость передать на бумаге свое настроение и мысли.

31 мая. Доктор Штраусс считает, что я работаю слишком интенсивно. Доктор Немюр говорит, что я пытаюсь втиснуть в несколько недель исследования и мысли, на которые уходит целая жизнь. Я знаю, что мне нужно отдохнуть, но меня подгоняет какой-то внутренний импульс, который не дает остановиться. Я должен найти причину быстрого регресса Элджернона. Я должен знать, произойдет ли это со мной. И если да, то к о г д а.

4 июня.

ПИСЬМО ДОКТОРУ ШТРАУССУ
(копия)

Дорогой доктор Штраусс!

Посылаю Вам в отдельном конверте рукопись этого моего доклада, названного мною «Эффект Элджернона — Гордона: исследование структуры и функции искусственно повышенного интеллекта»; я хотел бы, чтобы Вы его прочли и опубликовали.

Как видите, мои эксперименты закончены. Я включил в доклад все мои формулы, а в приложение к нему — математический анализ. Все это, конечно, должно быть проверено.

Исходя из того, насколько это важно для Вас и доктора Немюра (нужно ли говорить, что и для меня тоже?), я сам десятки раз проверял и перепроверял результаты моих исследований в надежде найти ошибку. С сожалением констатирую, что эти результаты остаются в силе. Однако с точки зрения интересов науки я рад, что вношу малую толику в совокупность сведений о функциях человеческого мозга и о законах, которым подчиняется искусственное повышение человеческого интеллекта.

Я помню, как Вы мне однажды сказали, что н е у д а ч а эксперимента или о п р о в е р ж е н и е теории имеют такое же важное значение для прогресса науки, как и успех. Теперь я понимаю, насколько это справедливо. Но все-таки мне жаль, что мой собственный вклад в эту область знаний полностью перечеркивает труды двух человек, которых я так высоко ценю.

Искренне Ваш *Чарльз Гордон.*

Докл. прилагается.

5 июня. Я должен держать себя в руках. Фактический материал и результаты проведенных мною экспериментов не оставляют сомнений, и наиболее сенсационные аспекты моего собственного быстрого подъема не могут затемнить то, что утроение интеллекта путем хирургического вмешательства по методу доктора Штраусса и доктора Немюра нужно рассматривать как открытие, в настоящее время практически малоприменимое или даже неприменимое вообще.

Просматривая записи и прочие материалы, относящиеся к эксперименту с Элджерноном, я вижу, что, хотя физически он

Окончание. См. «Квант» № 5, 6.

еще находится на ранней стадии развития, умственно он регрессирует. Двигательная активность ослаблена; наблюдается общее понижение деятельности желез внутренней секреции; налицо ускоренная потеря координации.

Имеются серьезные показатели прогрессирующей амнезии.

Стимулирующее хирургическое вмешательство, которому мы оба подверглись, привело к интенсификации и ускорению всех умственных процессов. Непредвиденные явления, которые я взял на себя смелость назвать «Эффектом Элджернона — Гордона», являются логическим следствием общего ускорения процессов мышления. Доказанную здесь гипотезу можно коротко сформулировать следующим образом: интеллект, повышенный искусственно, понижается затем со скоростью, прямо пропорциональной степени его повышения.

Мне кажется, что это уже само по себе является важным открытием. По всем данным моя собственная умственная деградация будет очень быстрой.

Я уже начал замечать в себе признаки эмоциональной неустойчивости и забывчивости — первые симптомы конца.

10 июня. Ухудшение прогрессирует. Я становлюсь рассеянным. Два дня назад скончался Элджернон. Вскрытие доказывает правильность моих предсказаний. Вес его мозга уменьшился, обнаружено общее сглаживание мозговых извилин, а также углубление и расширение борозд.

Полагаю, что со мной происходит или вскоре будет происходить то же самое.

Я положил труп Элджернона в коробку из-под сыра и похоронил его на заднем дворе. Я плакал.

15 июня. Ко мне снова приходил доктор Штраусс. Я не пожелал открыть дверь и попросил его уйти. Я хочу, чтобы меня оставили в одиночестве. Я становлюсь обидчивым и раздражительным. Чувствую, как сгущается тьма. Очень трудно выбросить из головы мысль о самоубийстве. Я все время напоминаю себе, какую важность приобретет впоследствии этот интроспективный дневник.

До чего же это странное ощущение, когда берешь книгу, которую с наслаждением читал всего лишь месяц назад, и обнаруживаешь, что совсем ее забыл. Я вспомнил, каким великим человеком казался мне Джон Мильтон, но, когда я сегодня попробовал почитать «Потерянный рай», я абсолютно ничего не понял. Я так рассвирепел, что швырнул книгу в другой конец комнаты.

Я должен попытаться сохранить хоть что-нибудь. Что-нибудь из того, что я за это время познал. О господи, не отнимай у меня всего...

19 июня. Иногда по вечерам я выхожу гулять. Прошлой ночью я не мог вспомнить, где я живу. Домой меня привел полицейский. У меня такое чувство, будто бы это уже произошло со мной однажды, очень давно. Я продолжаю убеждать себя в том, что я единственный в мире человек, который может описать, что со мною происходит.

21 июня. Почему я теряю память? Я должен бороться. Целыми днями я лежу в постели, не зная, кто я и где нахожусь. Потом все это вдруг возвращается. Причуды амнезии. Симптом старости — впадаю в детство. Как это беспощадно логично! Я познал так много и так быстро. А теперь мой интеллект понижается с огромной скоростью. Я не допущу этого. Я буду с этим бороться. Я не в состоянии отогнать от себя воспоминание о мальчике из ресторана, о тупом выражении его лица, глупой улыбке, о людях, которые над ним смеялись... Нет... умоляю... только не это... снова...

22 июня. Я забываю то, что выучил недавно. Похоже, все идет по классическим законам — в первую очередь забывается то, что было усвоено последним. Впрочем, закон ли это? Пожалуй, я лучше прочту еще раз...

Я перечитал свой доклад об «Эффекте Элджернона — Гордона», и мне показалось, будто его написал кто-то другой. Некоторые разделы я даже не понимаю.

Я все время спотыкаюсь о разные предметы, и мне становится все труднее печатать на машинке.

23 июня. Я полностью отказался от машинки. У меня плохая координация движений. Я чувствую, что двигаюсь все медленнее и медленнее. Сегодня у меня было ужасное потрясение. Я взял статью Крюгера «Über psichische Ganzheit»*) — я пользовался ею для моих исследований, чтобы посмотреть, не поможет ли она мне разобраться в сущности проделанной мною работы. Сперва мне показалось, что у меня что-то не в порядке со зрением. Потом я понял, что больше не могу читать по-немецки. Я попробовал другие языки. Все исчезло.

30 июня. Прошла неделя, пока я решился снова писать. Все постепенно утекает, как песок сквозь пальцы. Большинство моих книг теперь слишком для меня трудно. Они бесят меня, ведь я знаю, что

---

* «О психическом совершенстве» *(нем.). (Примеч. ред.)*

каких-нибудь несколько недель назад я их читал и понимал.

Я снова и снова внушаю себе, что должен продолжать писать эти отчеты, чтобы происходящее со мной стало известно другим. Но все труднее подыскивать слова и вспоминать, как они пишутся. Мне приходится теперь смотреть в словаре даже простые слова, и из-за этого я злюсь на самого себя.

Доктор Штраус приходит почти каждый день, но я сказал ему, что не хочу никого видеть и ни с кем разговаривать. Он чувствует себя виноватым. Все остальные тоже. Но я никого не виню. Я знал, что может из этого выйти. Но как же все-таки больно...

7 июля. Не знаю, куда ушла неделя. Я только знаю, что сегодня воскресенье потому что вижу в окно как люди идут в церковь. Кажется всю неделю я пролежал в кровати но я вспоминаю, что миссис Флинн несколько раз приносила мне поесть. Я все время повторяю себе что мне нужно чтото сделать но потом я забываю, а может это просто легче не делать того, что я говорю мне нужно сделать.

Эти дни я много думаю о моем отце и матери. Я нашел фотографию на которой мы все трое сняты на пляже. У отца подмышкой большой мяч а мать держит меня за руку. Я непомню их такими какие они на фото. Я только помню моего отца почти всегда пьяным и как он ругался с мамой из-за денег.

Он редко брился и всегда царапал мне лицо когда обнимал меня. Мать говорила что он умер но мой двоюродный брат Милти сказал, что слышал от своих родителей что мой отец убежал с другой женщиной. Когда я спросил об этом мать она залепила мне пощещину и сказала, что мой отец умер.

Мне кажется я так никогда и не узнаю правду да мне в общем то наплевать. (Один раз он сказал что возьмет меня на ферму посмотреть коров но так этого и не сделал. Он никогда не выполнял своих обещаний...)

10 июля. Моя хозяйка миссис Флинн очень за меня беспокоица. Она говорит что когда я вот так валяюсь целый день и ничево не делаю я ей напоминаю ее сына перед тем как она его выгнала из дому. Она сказала что не любит бездельников. Если я болен это одно а если я бездельник это уже другое дело и она этого непотерпит.

Я сказал я думаю что я заболел.

Я стараюсь читать понемножку каждый день в основном расказы но иногда мне приходица много раз перечитывать одно и тоже место потомучто я не понимаю что это значит. И мне трудно писать. Я знаю что мне нужно смотреть все слова в словаре но это очинь трудно а я все время такой усталый.

Потом я решил что вместо длиных трудных слов буду писать только легкие. Это сохраняет время. Примерно раз в неделю я кладу цветы на могилу Элджернона. Миссис Флинн думает я рехнулся что кладу цветы на мышиную могилу но я сказал ей что Элджернон был особиной мышью.

14 июля. Снова воскресенье. Мне теперь нечем себя занять потомучто мой телевизор сломался и у меня нет денег на починку. (Я вроде потерял чек из лабаратории за этот месяц. Не помню.)

У меня ужасно болит голова и асперин почти непомогает. Миссис Флинн знает что я паправде заболел и жалеет меня. Она очинь хорошая женщина стоит только кому-нибудь заболеть.

22 июля. Миссис Флинн позвала ко мне каковато чужова доктора. Она испугалась что я умираю. Я сказал доктору что я не очинь болен только иногда все забываю. Он спросил есть ли у меня друзья или родственики и я ответил нет у меня никаво нет. Я сказал ему что когдато у меня был друг котораво звали Элджернон но это была мыш и мы часто соревновались. Он както страно посмотрел на меня будто подумал что я псих.

А когда я сказал ему что я был гением он улыбнулся. Он так разговаривал со мной будто я малинький ребенок и подмигнул миссис Флинн. Я расердился и выгнал ево потомучто он надо мною издевался как все они раньше.

24 июля. У меня больше нет денег и миссис Флинн говорит что мне нужно гденибудь работать чтобы платить ей за комнату ведь я не заплатил больше чем за два месяца.

Я неумею ничево делать кроме работы которую я делал в «Компании по производству пластмасовых коробок» Доннегана. Я нехочу туда возвращатца потомучто они там знали меня когда я был умным и может будут теперь надо мною смеятца. Но я незнаю что еще делать чтобы достать деньги.

25 июля. Я смотрел некаторые из моих старых отчетов и это очинь страно но я немогу прочесть что я написал. Я разбираю некаторые слова но непонимаю их.

Мисс Кинниен приходила и стояла удвери но я сказал ей уходите я нехочу вас видеть. Она заплакала и я тоже заплакал но невпустил ее потомучто я нехотел чтобы она надо мною смеялась. Я сказал ей что она мне больше не нравица. Я сказал что я больше нехочу быть умным. Это неправда. Я попрежнему люблю ее и попрежнему хочу быть умным но я должен был так сказать чтобы она ушла. Она заплатила миссис Флинн за мою комнату. Я это нехочу. Я должен найти работу.

Пожалуста... сделайте так чтобы я неразучился читать и писать.

27 июля. Мистер Доннеган был очинь добрым когда я пришел на фабрику и попросил ево снова взять меня уборщиком. Сперва он смотрел на меня снедоверием но я расссказал что со мной случилось и он очинь огорчился положил мне на плечо руку и сказал Чарли Гордон ты мужиственый человек.

Все на меня смотрели когда я спустился вниз и начал как раньше мыть уборную. Я сказал себе Чарли если они будут над тобой смеятца не обижайся ты же помниш что они нетакие умные как тебе когдато казалось. А потом они ведь были раньше твоими друзьями и если они смеялись над тобой это ничево потомучто они тебя и любили тоже.

Один из рабочих котораво взяли после моево ухода гадко пошутил он сказал эй Чарли я слышал ты очинь башковитый парень прямо настоящий прафессор. А нука скжи чтонибудь умное.

Мне стало плохо но тут подошел Джо Керп схватил ево за рубашку и сказал оставь его в покое ты паршивый шутник а то я тебе сверну шею. Я неожидал что Джо станет на мою сторону и я думаю что он мой настоящий друг.

Попозже ко мне подошел Френк Рейлли и сказал Чарли если ктонибудь будет к тебе приставать или захочет тебя обмануть позови меня или Джо и мы ему дадим прикурить.

Я сказал спасибо Френк и задохнулся и мне пришлось уйти на склад чтобы он неувидел как я плачу. Хорошо иметь друзей.

28 июля. Севодня я сделал глупость я забыл что уже не хожу как раньше в клас к мисс Кинниен в школу для взрослых. Я зашел в клас и сел на мое старое место вконце комнаты а она страно посмотрела на мня и сказала Чарлз.

Я непомню чтобы она меня когданибудь так называла она говорила просто Чарли и я сказал привет мисс Кинниен я приготовил мой севодняшний урок только я потерял книжку для чтения по которой мы учимся. Она заплакала и убежала из комнаты и все на меня посмотрели тут я увидел что это совсем другие люди а не те которые раньше со мною учились в одном класе.

Потом я вдруг вспомнил чтото про апирацию и как я стал умным я сказал боже мой я паправде свалял Чарли Гордона. Я ушел до того как она вернулась в клас.

Поэтому я навсегда уезжаю из Нью-Йорка. Я нехочу еще раз сделать чтонибудь вроде этаво. Я нехочу чтобы мисс Кинниен меня жалела. На фабрике все меня жалеют и этаво я тоже нехочу поэтому я уеду в какоенибудь место где никто не знает что Чарли Гордон раньше был гением а теперь даже неможет читать книги и хорошо писать.

Я беру ссобой пару книг и даже если я несмогу их читать я буду много упражнятца и может я забуду не все что я выучл. Если я очинь постараюсь может я буду немножко умнее чем до апирации. У меня есть кроличья лапка и счасливое пенни и можетбыть они мне помогут.

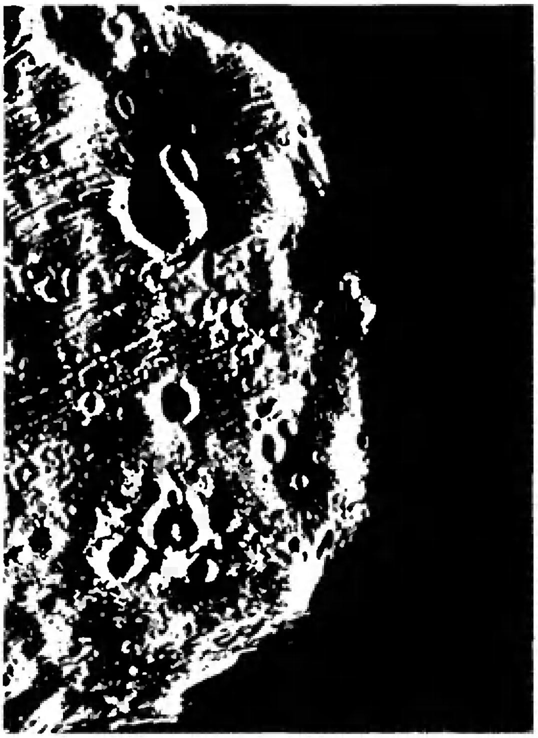
Мисс Кинниен если вы когданибудь прочтете это не жалейте меня я очинь рад что я использовал еще один шанс стать умным потомучто я узнал много разных вещей а раньше я никогда даже незнал что они есть на свете и я благодарн за то что я хоть наминутку это увидел.

Я незнаю почему я опять стал глупым и что я сделал нетак может это потому что я не очинь сильно старался. Но может если я постараюсь и буду много упражняца я стану немножко умнее и буду знать что значат все слова. Я немножко помню как мне было приятно когда я читал синюю книжку с порваной обложкой. Поэтому я обязательно буду все время старатца стать умным чтобы мне опять было так хорошо. Это очинь приятно знать разные вещи и быть умным. Я бы хотел быть таким прямо сейчас еслибы так я сел бы и все время читал. А всетаки я наверняка первый во всем мире глупый человек который открыл чтото важное для науки. Я помню что я чтото сделал но только непомню что. Кажеца я вроде сделал чтото для всех таких глупых людей как я.

Прощайте мисс Кинниен и доктор Штраусс и все и P. S. пожалуста скажите доктору Немюру чтобы он так неворчал когда над ним смеюца и у нево будет больше друзей. Совсем нетрудно иметь друзей если разрешаеш людям над собой смеятца. Там куда я еду у меня будет много друзей.

P. P. S. Если у вас будет возможность положите пожалуста немножко цветов на могилу Элджернона которая на заднем дворе...

Перевод с английского С. Васильевой



Р-значит ракета

Перспективы поиска обитаемых планет

Доктор физико-математических наук
Л. КСАНФОМАЛИТИ

Проблемы обитаемости и жизни во Вселенной относятся к глубочайшим вопросам философии. Идея существования на отдаленных мирах братьев по разуму почти никого не оставляет равнодушным. Мыслители различных исторических эпох неизменно обращались к этой теме. Человек во все времена мечтал о встрече с себе подобными и мысленно населял ими сначала неведомые земли, потом неизвестные небесные тела.

Когда наука и технология достигли современного уровня, проблема поиска жизни во Вселенной — в том или ином виде — была включена в научные планы исследований многих стран.

Существуют ли планетные системы других звезд?

Если не говорить о всевозможных фантазиях, всерьез можно искать жизнь — в единственной известной нам форме — лишь на планетах. Сейчас ученым известна только одна планетная система — наша, и уверенных результатов поисков планет у других звезд пока нет. Поэтому приходится пользоваться некоторыми косвенными сведениями о том, насколько распространены системы, подобные Солнечной.

Общепринятая гипотеза происхождения планетной системы предполагает формирование планет путем конденсации протопланетного газопылевого облака, захваченного протосолнцем или оставшегося после его образования. Эта гипотеза была предложена в нашей стране академиком О. Ю. Шмидтом и подробно разрабатывалась сначала им самим, а впоследствии его учениками. Независимо, сходные предположения были высказаны зарубежными учеными, в частности К. Вайцзеккером в Германии.

Отметим, что переход от качественных рассуждений к более или менее строгой теории обнаружил крайнюю сложность происходивших при формировании планет процессов. Многие авторы считают, что после образования Солнца гораздо вероятнее конденсация остатков туманности во вторую, карликовую, звезду, чем в планетную систему. Иными словами, вероятность образования двойной звезды намного выше образования звезды с планетами. И действительно, именно двойные и кратные звезды и составляют подавляющее большинство «населения» Галактики. Поэтому сам факт существования нашей планеты требует объяснения.

Чтобы как-то «спасти положение», предложено несколько «катастрофических» гипотез, согласно которым планетная система могла образоваться в результате каких-то катастрофических событий — взрывов, сближений звезд и т. п. Например, рассматривается гипотеза о том, что на определенной стадии эволюции протопланетной туманности неподалеку от нее проходила звезда, которая именно в этот момент взорвалась как сверхновая. Возникшие в протопланетной туманности ударные волны создали необходимые условия для дальнейшего формирования планет. Сильную поддержку эта гипотеза получила, в частности, в результате анализа химического состава метеорита Альенде. В нем оказалось необычно много кальция, бария и неодима — именно такая аномалия состава и должна была бы возникнуть под действием близкой вспышки сверхновой. Но вспышки сверхновых — явления крайне редкие. Поэтому изложенная гипотеза допускает, что планетные системы образуются у ничтожного числа звезд, т. е. как редкое исключение.

Справедлива ли такая гипотеза? Может быть, метеорит Альенде — межзвездный скиталец, который действительно когда-то был свидетелем вспышки сверхновой, но и только? Вместе с тем, в последние годы с помощью космических, а затем и наземных средств удалось обнаружить, что некоторые звезды окружены пылевыми дисками большой протяженности. Многие ученые полагают, что это — будущие планетные системы. Наряду с пылевыми дисками удается также косвенно установить присутствие у некоторых звезд спутников с массой, промежуточной между звездой и планетой.

Интересная возможность обнаружить планету существует в том случае, если планета обитаема и ее цивилизация близка к нашему уровню. Остановимся на этом несколько подробнее.

Если образование планет и возникновение жизни на них — процессы закономерные и если возникшая жизнь во многих случаях достигает разумного и технологического уровня, о существовании планетных систем можно было бы судить по признакам технической деятельности какой-то цивилизации. Так, если предположить, что развитое общество обязательно использует радиосвязь, радиоизлучение искусственного происхождения можно было бы обнаружить с помощью приемников высокой чувствительности. Но пока поиски таких сигналов неизменно кончались разочарованием.

На самом деле было бы очень наивно искать обитаемые миры с цивилизацией примерно на том же уровне технического развития, что и наша. Даже если бы их было много, они обязательно были бы отделены друг от друга не только десятками или сотнями парсек*), но и огромными временными интервалами. Иными словами, наше настоящее может быть «их» весьма далеким прошлым, а радиосвязь для «них» — чем-то вроде наскальных рисунков. Однако проблема не безнадежна. Технически развитое и энергетически вооруженное общество должно выдавать себя весьма интенсивным инфракрасным или микроволновым излучением (что иногда называют «космическим чудом»).

Все эти предположения опираются на предпосылку о достаточно долгой жизни цивилизаций. Если же продолжительность их существования мала, искать их по радио- или микроволновому излучению бесполезно.

Поиски радиоизлучений со специфическими признаками — увлекательная задача, но здесь для нас важен их неизменно отрицательный результат. Не исключено, что наиболее вероятная причина этого — малая распространенность разумной жизни в Галактике. В свою очередь, малую распространенность можно связать как с малой вероятностью возникновения жизни и ее эволюцией в разумные формы на имеющейся пла-

*) Парсек (пк) — единица длины, применяемая в астрономии; 1 пк $\approx 3 \cdot 10^{16}$ м. Свет проходит это расстояние в три с небольшим года.

Панорама лунной поверхности, переданная на Землю во время третьего дня работы советского самоходного аппарата «Луноход-1» (1970 г.). На ней хорошо виден след, оставленный колесами лунохода.

нете, так и с низкой распространенностью самих планетных систем. К сожалению, остается неизвестным, какая именно из двух причин «работает».

На Земле жизнь возникла всего через полмиллиарда лет после завершения формирования планеты. Подробности происхождения жизни неизвестны. Существенно, что уже первые, самые примитивные организмы были наделены важнейшими механизмами, которые клетки всех живых существ используют и теперь.

Но насколько закономерно возникновение жизни на планете?

В оценке вероятности как появления разумной жизни, так и образования планетной системы мы располагаем одним-единственным доказательством — это мы сами и Солнечная система. Поэтому вероятность может быть любой — практически от единицы до нуля, и потому так важны исследование планет Солнечной системы и поиск планетных систем у других звезд.

Благодаря космическим исследованиям, планетная астрономия за последние 15—20 лет стала одной из наиболее бурно развивающихся областей астрономической науки. Отвлечемся от того, что может ждать нас у далеких звезд, и познакомимся с довольно безрадостными пока результатами поисков жизни на планетах Солнечной системы.

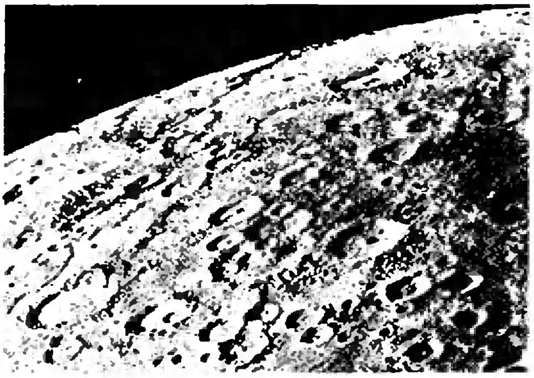
Луна и Меркурий

Хронологически Луна была первым небесным телом, стерильность*) которого установлена экспериментальным путем. Отсутствие атмосферы, связанное с этим облучение поверхности всеми видами существующей в околоземном пространстве радиации и резкие перепады температур — таковы физические условия на естественном спутнике Земли.

Луна — очень крупное небесное тело, один из самых больших естественных спутников в Солнечной системе. Ее диаметр 3476 км, масса 1/81 земной. Магнитного поля у Луны нет. (Как известно, магнитное поле образует над Землей своеобразную «крышу», которая защищает ее от заряженных частиц и собирает их в радиационные пояса. На стадии возникновения земной жизни это был немаловажный фактор, поскольку облучение заряженными частицами высоких энергий также создает стерилизующий эффект.) Вращение Луны заторможено приливным воздействием Земли. В результате в течение длительного лунного дня температура поверхности повышается до 340—370 К, а ночью падает до 130 К и ниже.

Реголит, верхний слой лунной коры, представляет собой продукт перера-

*) Отсутствие жизнеспособных клеток или спор микроорганизмов.



Сходство Меркурия с Луной отчетливо заметно на фотографии Меркурия, полученной американским космическим аппаратом «Маринер-10» (1974 г.).

ботки грунта в результате постоянной метеоритной бомбардировки, в основном микрометеоритными частицами. Основной вид пород поверхности Луны — базальты. Базальтовые лавы в морских районах изливались в эпоху высокой вулканической активности, которая давно угасла. Камни и рыхлый грунт — таков был характерный вид поверхности Луны в районе работы советских роботов «Луноход-1» и «Луноход-2» (1970—1973 гг.).

Все, что известно ныне о Луне, полностью исключает ее из числа небесных тел, где можно было бы ожидать найти жизнь даже в самых простейших известиых нам формах.

На Луну очень похож **Меркурий** — первая планета Солнечной системы. Он также лишен атмосферы. Фотометрические свойства его поверхности практически такие же. Из-за приливного влияния близкого Солнца продолжительность солнечных суток на Меркурии — 176 земных дней, года — 88 дней. В течение длительного солнечного дня поверхность на экваторе раскаляется до 800 К, а ночью быстро остывает до 100 К.

Вид большинства районов Меркурия внешне неотличим от лунных — те же бесчисленные метеоритные кратеры, что и на Луне, только их диаметр меньше (это и понятно: из-за вдвое меньшего ускорения свободного падения на Луне обломки при ударе разлетались дальше).

Рельеф Меркурия представляет наложение огромного количества метеоритных кратеров, среди которых иногда встречаются относительно молодые образования. Предполагается, что пик метеоритной бомбардировки приходился на —3,9 млрд. лет, после чего рельеф Меркурия претерпел сравнительно мало изменений. В некоторых случаях отмечаются очень старые кратеры, дно которых несет следы обширных лавовых излияний. Это — косвенное указание на то, что процесс формирования поверхности Меркурия и местные излияния лавы происходили одновременно. Иными словами, в эпоху формирования планеты имелись отдельные очаги магмы, местами выходившие на поверхность. На Меркурии, в отличие от Луны, нет обширных кратерных «морей». Бассейн Калорис (или Море Зноя) — единственное большое образование такого рода на известной стороне планеты. Оно находится в одной из двух областей, которые поочередно обращены к Солнцу в перигелии.

Радиус планеты составляет 2439 км, масса — 0,055 массы Земли. Отражательная способность поверхности Меркурия примерно вдвое выше, чем у Луны.

Недра Меркурия представляют уникальное явление среди планет земной группы — радиус его металлического ядра оценивается в 0,75 радиуса планеты. Вывод о таком большом ядре опирается как на весьма высокую среднюю плотность планеты, так и на ее довольно сильное магнитное поле. Обнаружение магнитного поля у Меркурия в 1974 году было одной из сенсаций; ученые до сих пор не могут объяснить его существование.

Излишне говорить, что Меркурий — планета безжизненная. Когда к нему отправятся экспедиции людей, инженерам придется немало потрудиться, чтобы создать подходящее снаряжение. Выжить на такой планете будет очень непросто.

(Продолжение следует)

Вместе к Марсу!

Сроки экспедиции на Марс назначены! Отбор экипажа еще не начался, но специалисты уже работают над проектами крупнейшей космической одиссеи человечества. И вы можете принять участие в этой работе.

Ряд научных и общественных организаций СССР открывают Всесоюзный этап Международного научного конкурса «Вместе к Марсу». Заключительный этап конкурса состоится в Вашингтоне (США) в 1992 году в рамках Международного года исследований космоса.

В конкурсе принимают участие те, кто родился не ранее 1 января 1974 года. В работе вам могут помогать старшие товарищи или научные руководители. Над одним проектом может работать и группа из 2—3 человек.

Ваша работа — это может быть инженерная разработка конструкции всего комплекса или его части, программа космических исследоваиий или экспериментов, концепция всей экспедиции или вопросы организации досуга космонавтов, анализ экологических проблем или психологических аспектов столь длительного полета, план организации сотрудничества при реализации экспедиции или методика подготовки экипажей, словом, все, что относится к долговременной межпланетной экспедиции или освоению Марса,— должна быть представлена в виде отчета объемом не более 10 000 слов (40 машинописных страниц), на русском языке. Отчет включает титульный лист с названием темы и сведениями об авторах (фамилия, имя, отчество, год рождения, адрес, учебное заведение, класс, курс) и руководителях; введение; описание выбранной проблемы и методов ее решения; само решение. Количество иллюстраций, диаграмм, схем, ссылок, фотографий, слайдов, дискет и моделей не ограничено — лишь бы они были необходимы для пояснений разработки.

В представленных работах будут оцениваться оригинальность, творческий подход, научная и техническая обоснованность, полнота и ясность изложения. При оценке работы будет учитываться и число участников, и роль руководителя.

Работы на Всесоюзный этап принимаются до 30 апреля 1991 года. Затем будут названы победители этапа и определены участники финала. Победители этапа награждаются призами и сувенирами. На заключительный этап конкурса будут направлены 3 представителя от СССР (но не более одного от любого проекта).

Участников финальной части, которую организует Планетное общество США, ждут специальные удостоверения и призы. 20 победителей финала получат денежные награды в размере 2500 долларов.

Свои работы высылайте по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «КВМ-91»).

Оргкомитет «КВМ-91»

Идея есть, и не одна

(Начало см. на с. 58)

образцы породы можно приморaживать. Особенно ценным такой способ взятия проб может сказаться при исследовании ила. Любой механический манипулятор при зачерпывании обязательно смешает собираемые осадочные породы. А замерзший ил, вытащенный с помощью примораживающего устройства, можно исследовать послойно.

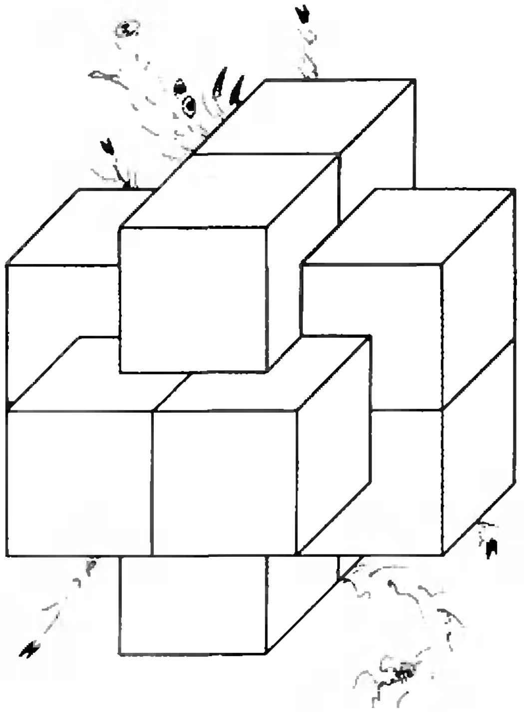
Итак, читатель, наверное, обратил внимание на некоторые особенности решения изобретательских задач с использованием физических принципов. Во-первых, решение находится не на пути создания сложного механизма, а за счет использования какого-нибудь физического эффекта. Во-вторых, найденный физический принцип в большинстве случаев оказывается применим для решения целой группы задач. В-третьих, наиболее красивые решения — это те, в которых используется сразу несколько физических свойств задействованных веществ. Так, в решении Саши Чернова азот вначале используется как хладагент, а потом — как наполнитель оболочки, обеспечивающей подъемную силу.

В заключение хочется поблагодарить всех ребят, приславших нам письма, и предложить следующую задачу.

Задача 2. «Сушка меха» В пушной промышленности возникает проблема сушки меха после мытья. Волоски меха слипаются, образуя неприглядные «сосульки». Это портит внешний вид меха. Нужно найти способ, позволяющий разделить волоски меха в процессе сушки.

Ждем ваших писем. На конверте с решением сделайте пометку «Идея-2».

Ведущий рубрики А. Лазарян



Игры и головоломки

Превращения головоломки адмирала Макарова

Д. ВАКАРЕЛОВ, А. КАЛИНИН

Мир устроен так, что вещи в нем могут жить дольше, чем люди, иметь разные имена в разное время и в разных странах. Игрушка, которую вы видите на рисунке, известна в нашей стране как «головоломка адмирала Макарова». В других странах она имеет другие имена, из которых наиболее часто встречающиеся — «дьявольский крест» и «чертов узел».

Этот узел связывается из 6 брусков квадратного сечения. В брусках имеются пазы, благодаря которым и возможно скрещивание брусков в центре узла. Один из брусков не имеет пазов, он закладывается в узел последним, а при разборке вынимается первым.

Автор этой головоломки неизвестен. Появилась она много веков назад в Китае. В ленинградском Музее антропологии и этнографии им. Петра Великого, известном как «Кунсткамера», хранится старинная, сандалового дерева шкатулка из Индии, в 8 углах которой пересечения брусков каркаса образуют 8 головоломок. В средние века моряки и купцы, воины и дипломаты забавлялись такими головоломками и заодно развозили их по свету. Адмирал Макаров, дважды бывавший в Китае до своей последней поездки и гибели в Порт-Артуре, привез игрушку в Петербург, где она вошла в моду в светских салонах. В глубину России головоломка проникала и другими дорогами. Известно, что в деревню Олсуфьево Брянской области чертов узел принес солдат, вернувшийся с русско-турецкой войны.

Сейчас головоломку можно купить в магазине, но приятнее сделать ее своими руками. Наиболее подходящий размер брусков для самодельной конструкции: 6×2×2 см.

Многообразие чертовых узлов

До начала нашего века, за несколько сот лет существования игрушки в Китае, Монголии и Индии было придумано более ста вариантов головоломки, отличающихся между собой конфигурацией вырезов в брусках. Но самыми популярными остаются два варианта. Показанный на рисунке 1 решается довольно легко, просто его и изготовить. Именно эта конструкция использована в древней индийской шкатулке. Из брусков рисунка 2 складывается головоломка, которая называется «Чертов узел». Как вы догадываетесь, свое название она получила за трудность решения.

В Европе, где, начиная с конца прошлого века, «Чертов узел» получил широкую известность, энтузиасты стали придумывать и делать наборы брусков с разными конфигурациями вырезов. Один из наиболее удачных комплектов позволяет получать 159 головоломок и состоит из 20 брусков 18 видов. Хотя все узлы внешне неразличимы, они совершенно по разному устроены внутри.

Болгарский художник, профессор Петр Чуховски, автор множества причудливых и красивых деревянных узлов из разного количества брусков, тоже занимался головоломкой «Чертов узел». Он разработал набор конфигураций брусков и исследовал всевозможные комбинации 6 брусков для одного простого его поднабора.

Настойчивее всех в таких поисках был голландский профессор математики Ван де Боер, который своими руками сделал набор из нескольких сотен брусков и составил таблицы, показывающие, как собрать 2906 вариантов узлов.

Это было в 60-е годы, а в 1978 году американский математик Билл Катлер написал программу для компьютера и методом полного перебора определил, что существует 119 979 вариантов головоломки из 6 элементов, отличающихся друг от друга комбинациями выступов и впадин в брусках, а также размещением брусков, при условии, что внутри узла нет пустот. Удивительно большое число для такой маленькой игрушки! Поэтому для решения задачи и понадобилась ЭВМ.

Как ЭВМ решает головоломки?

Конечно, не так, как человек, но и не каким-то волшебным способом. Компьютер решает головоломки (и другие задачи) по программе, программы пишут программисты. Пишут, как им удобно, но так, чтобы было понятно и ЭВМ. Как же ЭВМ манипулирует деревянными брусками?

Будем исходить из того, что мы имеем набор из 369 брусков, отличающихся друг от друга конфигурациями выступов (этот набор первым определил Ван де Боер). В ЭВМ надо ввести описания этих брусков. Минимальный вырез (или выступ) в бруске — это кубик с ребром, равным 0,5 толщины бруска. Назовем его единичным кубиком. В целом бруске содержатся 24 таких кубика (рисунок 1). В ЭВМ для каждого бруска заводится «малый» массив из $6 \times 2 \times 2 = 24$ чисел. Брусок с вырезами задается последовательностью 0 и 1 в «малом» массиве: 0 соответствует вырезанному кубику, 1 — целому. Каждый из «ма-

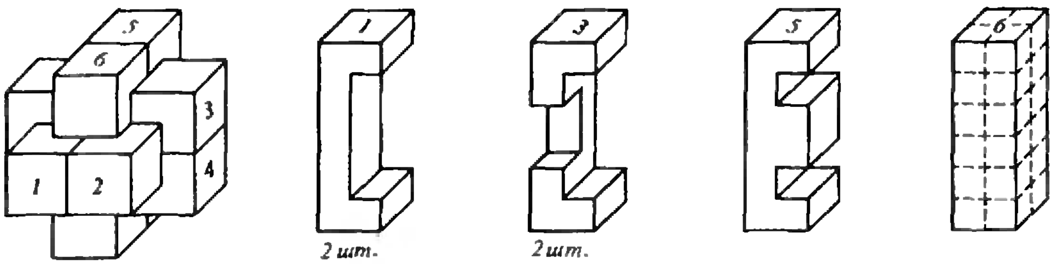


Рис. 1. Простейший вариант головоломки «чертов узел».

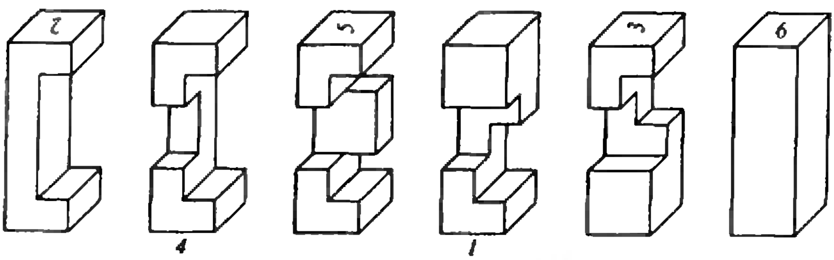


Рис. 2. Бруски классического варианта головоломки «чертов узел» — «головоломка адмирала Макарова».

лых» массивов имеет свой номер (от 1 до 369). Любому из них можно присвоить еще номер от 1 до 6, отвечающий положению бруска внутри головоломки.

Перейдем теперь к головоломке. Представим, что она помещается внутрь куба размером 8×8×8. В ЭВМ этому кубу соответствует «большой» массив, состоящий из 8×8×8=512 ячеек-чисел. Поместить определенный брусок внутрь куба — это значит заполнить соответствующие ячейки «большого» массива числами, равными номеру данного бруска.

Сравнивая 6 «малых» массивов и основной, ЭВМ (т. е. программа) как бы складывает вместе 6 брусков. По результатам сложения чисел она определяет, сколько и каких «пустых», «заполненных» и «переполненных» ячеек образовалось в основном массиве. «Пустые» ячейки соответствуют пустому пространству внутри головоломки, «заполненные» — соответствуют выступам в брусках, а «переполненные» — попытке соединить вместе два единичных кубика, что, естественно, запрещено. Такое сравнение производится многократно, не только с разными брусками, но и с учетом их разворотов, мест, которые они занимают в «кресте», и т. п.

В результате отбирают те варианты, в которых нет пустых и переполненных ячеек. Для решения этой задачи достаточно было бы «большого» массива размером 6×6×6 ячеек. Оказывается, однако, что существуют комбинации брусков, полностью заполняющие внутренний объем головоломки, но при этом разобрать их невозможно. Поэтому программа должна уметь проверять узел на возможность разборки. Для этого Катлер и взял массив 8×8×8, хотя его размеры, возможно, недостаточны для проверки всех случаев.

Он заполняется информацией о конкретном варианте головоломки. Внутри массива программа пытается «двигать» бруски, т. е. перемещает в «большом» массиве части бруска размером 2×2×6 ячеек. Перемещение происходит на 1 ячейку в каждом из 6 направлений, параллельных осям головоломки. Результаты тех из 6 попыток, в которых не образуется «переполненных» ячеек, запоминаются как исходные положения для следующих шестерок попыток. В результате строится дерево всевозможных движений до тех пор, пока какой-нибудь брусок целиком не выйдет из основного массива или же после всех попыток останутся «переполненные» ячейки, что соответствует варианту, который невозможно разобрать.

Вот так были получены на ЭВМ 119 979 вариантов «Чертова узла», в том числе не 108, как полагали древние, а 6402 варианта, имеющих 1 целый, без вырезов брусок.

Суперузел

Обратим внимание, что Катлер отказался от исследования общей задачи — когда узел содержит и внутренние пустоты. В этом случае количество узлов из 6 брусков сильно возрастает и полный перебор, необходимый для поиска допустимых решений, становится нереальным даже для современного компьютера. Но как мы увидим сейчас, самые интересные и трудные головоломки содержатся именно в общем случае — разборку головоломки тогда можно сделать далеко не тривиальной.

Благодаря наличию пустот, появляется возможность последовательно передвинуть несколько брусков прежде, чем удастся полностью отделить какой-либо брусок. Движущийся брусок отцепляет некоторые бруски, разрешает движение следующего бруска и одновременно зацепляет другие бруски.

Чем больше нужно проделать манипуляций при разборке, тем интереснее и труднее вариант головоломки. Пазы в брусках расположены так хитро, что поиск решения напоминает блуждание по темному лабиринту, в котором все время наталкиваешься то на стены, то на тупики. Такого типа узел несомненно заслуживает и нового имени; мы будем называть его «суперузел». Мерой сложности суперузла назовем количество движений отдельных брусков, которые необходимо сделать до того, как первый элемент будет отделен от головоломки.

Мы не знаем, кто придумал первый суперузел. Наиболее знамениты (и наиболее трудны в решении) два суперузла: «колючка Билла» сложности 5, придуманная У. Катлером, и «суперузел Дюбуа» сложности 7. До сих пор считалось, что степень сложности 7 едва ли можно превзойти. Однако первому из авторов этой статьи удалось усовершенствовать «узел Дюбуа» и увеличить сложность до 9, а затем, используя некоторые новые идеи, получить суперузлы со сложностью 10, 11 и 12. Но число 13 остается пока непреодолимым. Может быть, число 12 является самой большой сложностью суперузла?

Решение суперузлов

Приводить чертежи таких трудных головоломок, как суперузлы, и не раскрывать их секретов было бы слишком жестоко по отношению даже к знаткам головоломок. Мы дадим решение суперузлов в компактной, алгебраической форме.

Перед разборкой берем головоломку и ориентируем так, чтобы номера деталей соответствовали рисунку 1. Последовательность разборки записывается в виде сочетания цифр и букв. Цифры означают номера брусков, буквы — направления движения в соответствии с показанной на рисунках 3 и 4 системой координат. Черта над буквой означает движение в отрицательном направлении оси координат. Один шаг — это перемещение бруска на $1/2$ его ширины. Когда брусок передвигается сразу на два шага, его перемещение записывается в скобках с показателем степени 2. Если передвигают сразу несколько деталей, которые зацеплены между собой, то их номера заключают в скобки, например $(1, 3, 6)\,x$. Отделение бруска от головоломки отмечается вертикальной стрелкой.

Приведем теперь примеры лучших суперузлов.

Головоломка У. Катлера («колючка Билла»). Она состоит из деталей 1, 2, 3, 4, 5, 6, показанных на рисунке 3. Там же приводится алгоритм ее решения. Любопытно, что в журнале «Scientific American» (1985, № 10) приведен другой вариант этой головоломки и сообщается, что «колючка Билла» имеет единственное решение. Различие между вариантами — всего в одном бруске: деталях 2 и 2 *B* на рисунке 3.

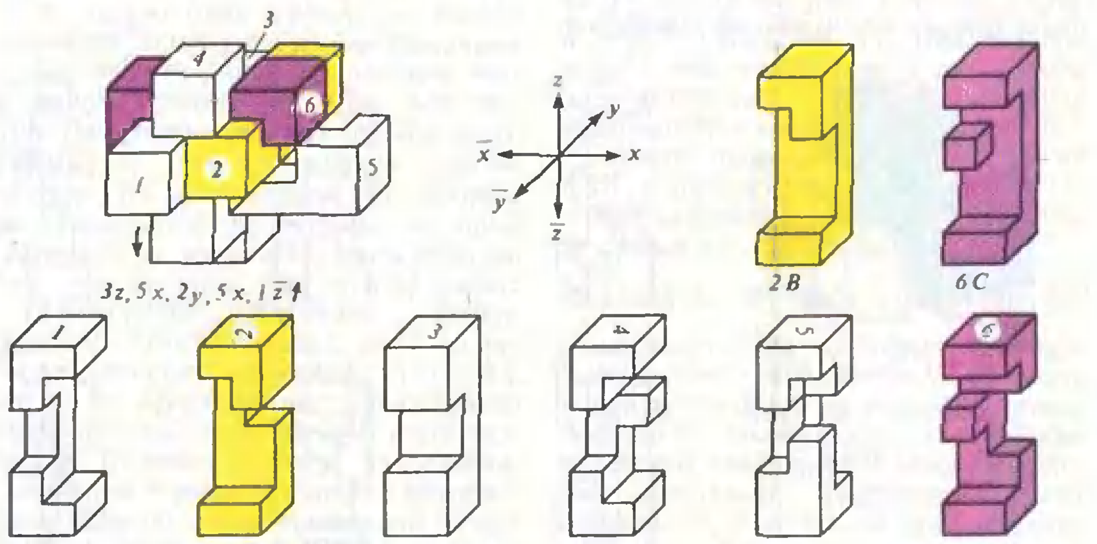
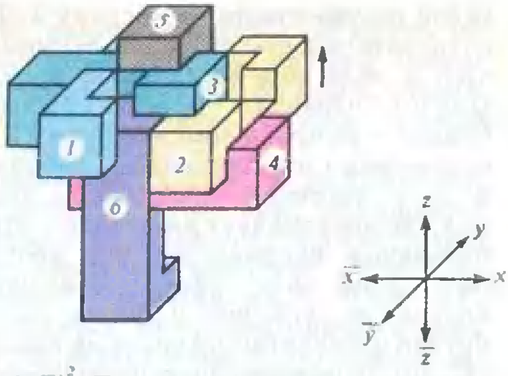
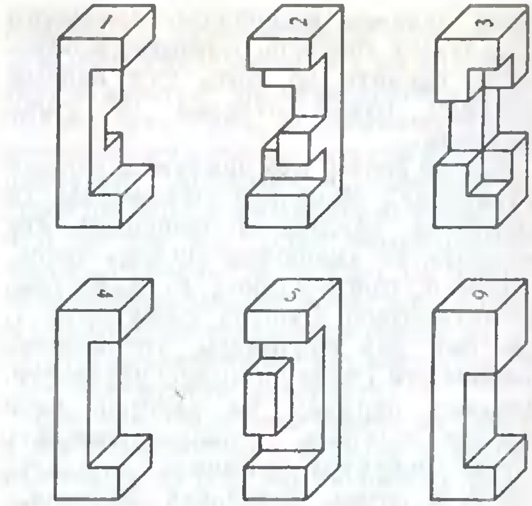


Рис. 3. Головоломка «колючка Билла», разработанная с помощью ЭВМ.

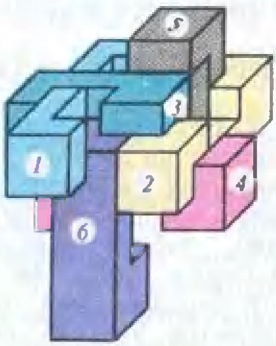


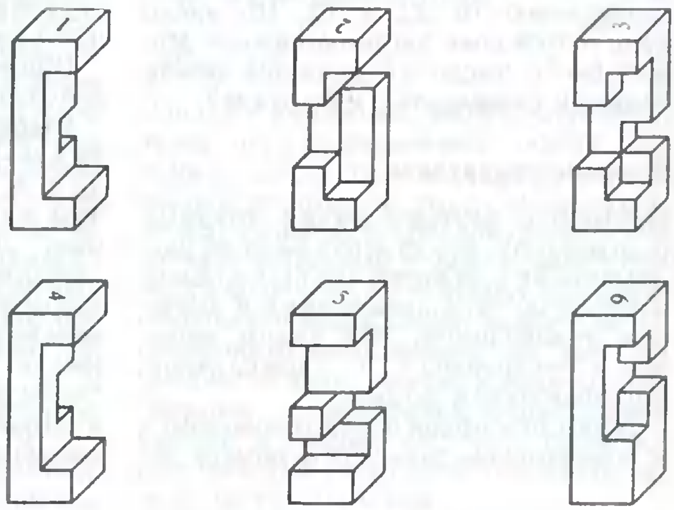


$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x, 2y, 2z\uparrow$

$(4\bar{x})^2, 1\bar{z}, 1\bar{x}, 6\bar{y}\uparrow$

Рис. 4. Суперузел Ф. Дюбуа сложности 7.

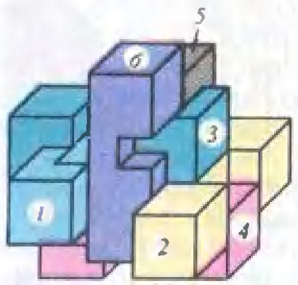


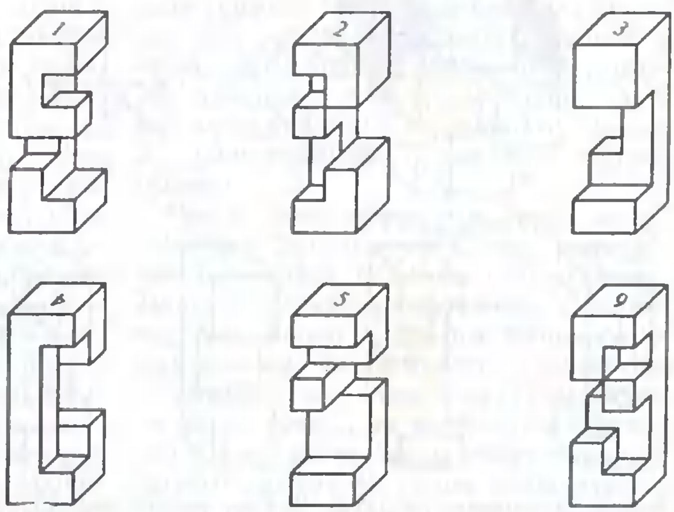


$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x,$

$2y, 5x, 5y, 3z \uparrow (9)$

Рис. 5. Суперузел Д. Вакарелова сложности 9.





$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x, 2x, 2\bar{z}, 3\bar{x}$

$1z, 6z, 3\bar{x}, 1\bar{x}, 6\bar{y}\uparrow (11)$

Рис. 6. Суперузел Д. Вакарелова сложности 11.

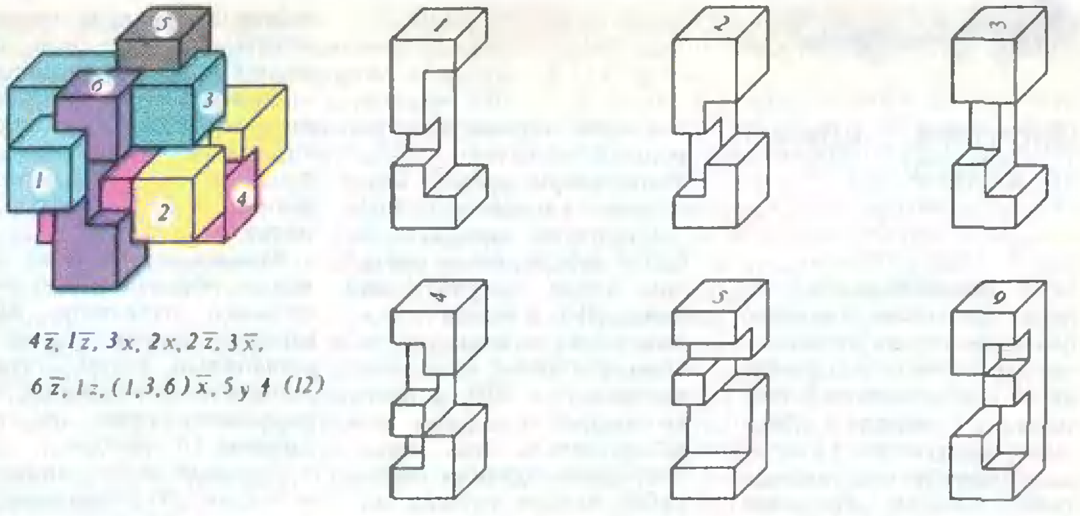


Рис. 7. Суперузел Д. Вакарелова сложности 12.

Из-за того, что деталь 2 *B* содержит меньше вырезов, чем деталь 2, вставить ее в «колючку Билла» по указанному на рисунке 3 алгоритму не удается. Остается предположить, что головоломка из «Scientific American» собирается каким-то другим способом.

Если это так и мы ее соберем, то после этого сможем заменить деталь 2*B* на деталь 2, так как последняя занимает меньший объем, чем 2 *B*. В результате мы получим второе решение головоломки. Но «колючка Билла» имеет единственное решение, и из нашего противоречия можно сделать только один вывод: во втором варианте допущена ошибка в рисунке.

Аналогичная ошибка сделана еще в одной публикации (Дж. Слокум, Дж. Ботерманс «Puzzles old and new», 1986), но уже в другом бруске (деталь 6 *C* на рисунке 3). Каково же было тем читателям, которые пытались и, возможно, пытаются до сих пор решить эти головоломки?

Головоломка Филиппа Дюбуа (рис. 4). Она решается за 7 ходов по следующему алгоритму: $(6\bar z)^2, 3\bar x, 1\bar z, 4x, 2x, 2y, 2z\uparrow$. На рисунке показано расположение деталей на 6 шаге разборки. Начиная с этого положения, используя обратный порядок алгоритма и изменяя направления движения на противоположные, можно собрать головоломку.

Три суперузла Д. Вакарелова. Первая из его головоломок (рис. 5) — это усовершенствованный вариант головоломки Дюбуа, он имеет сложность 9. Этот суперузел больше других похож на лабиринт, так как при его разборке возникают ложные ходы, заводящие в тупики. Пример такого тупика — ходы $3\bar x$, $1\bar z$ в начале разборки. А правильное решение такое:

$$(6\bar z)^2,\ 3\bar x,\ 1z,\ 4x,\ 2x,\ 2y,\ 5x,\ 5y,\ 3z\uparrow.$$

Вторая головоломка Д. Вакарелова (рис. 6) *решается по формуле:*

$$4\bar z,\ 1\bar z,\ 3x,\ 2x,\ 2\bar z,\ 3\bar x,\ 1z.\ 6z.\ 3\bar x,\ 1x, 6y\uparrow$$

и имеет сложность 11. Она замечательна тем, что брусок 3 на третьем ходу делает шаг $3x$, а на шестом ходу возвращается обратно ($3\bar x$); и брусок 1 на втором шаге двигается по $1\bar z$, а на 7 ходу делает обратный ход.

Третья головоломка (рис. 7) — одна из самых сложных. Ее решение:

$$4\bar z, 1\bar z, 3x. 2x. 2\bar z, 3\bar x, 6\bar z, 1z, (1,3,6)\bar x, 5y\uparrow$$

до седьмого хода повторяет предыдущую головоломку, затем, на 9 ходу в ней встречается совершенно новая ситуация: неожиданно все бруски перестают двигаться! И тут необходимо догадаться подвинуть сразу 3 бруска (1, 3, 6), и если это движение считать за 3 хода, то сложность головоломки будет равна 12.

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка — его руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо выслать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой прислать первое задание. Срок отправки заявления — *не позднее 20 сентября* (по почтовому штемпелю места отправления). В заявлении необходимо указать также некоторые сведения о себе:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	9 «а»
Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два)	математическое (и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Зачисление в ЗШ производится по результатам первого задания. В тех случаях, когда число желающих учиться в ЗШ превышает возможности нашей школы, предпочтение может быть отдано школьникам из села или из малых городов и поселков.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, но *не позднее 10 октября*.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставив поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

Поскольку в задании имеются задачи различной степени сложности, для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным правильно решить одну — две задачи.

Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами и для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше).

Экспериментальная задача — одна для поступающих во все классы.

Измерьте плотность древесины, погружая деревянный предмет в кастрюлю с водой и используя для измерения только линейку. Плотность воды известна.

Теоретические задачи

9 класс

1. Со дна водоема пытаются поднять стальной затонувший якорь массой 780 кг с помощью пенопластового шара, прикрепляя его к якорю легким тросом. При каком минимальном объеме шара это возможно? Плотности стали, воды и пенопласта равны соответственно 7800, 1000 и 150 кг/м^3.

2. Проволоку сопротивлением 100 Ом разрезали на несколько равных частей и соединили их параллельно. После этого общее сопротивление стало равным 1 Ом. На сколько частей разрезали проволоку?

3. За какое время радиус намотки магнитофонной ленты увеличится от r до R? Толщина ленты d, скорость v.

4. Имеются резистор сопротивлением 100 Ом, рассчитанный на мощность не более 4 Вт, и резистор сопротивлением 200 Ом, рассчитанный на мощность не более 2 Вт. Какое максимальное напряжение можно подать на систему этих резисторов, соединенных последовательно, без риска выведения их из строя?

10 класс

1. Два спортсмена бегут одинаковое время. Один бежит первую половину времени с ускорением a, вторую — с ускорением $2a$. Другой спортсмен — наоборот, т. е. первую половину времени бежит с ускорением $2a$, вторую — с a. Кто из них пробежит большее расстояние?

2. За какое минимальное время может въехать автомобиль на гору, поверхность которой образует угол α с горизонтом? Начальная скорость автомобиля при въезде на гору v, высота горы H, коэффициент трения колес о дорогу μ ($\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$).

3. Конус с углом раствора 2α при вершине стоит на горизонтальном столе. Небольшое тело прикреплено к вершине конуса с помощью нити длиной L. С какой минимальной скоростью может вращаться тело вокруг конуса, оставаясь в контакте с его поверхностью? Ускорение свободного падения g, трения между конической поверхностью и телом нет.

4. Ускорение свободного падения на поверхности некоторой планеты равно g_1, а на высоте H над поверхностью — g_2. Найдите радиус этой планеты.

5. Тело некоторой массы лежит на горизонтальном полу. Оно привязано к потолку, расположенному на высоте H от пола, свободно свисающим невесомым резиновым шнуром длиной L ($L > H$). Жесткость шнура k. Какую минимальную горизонтальную скорость необходимо сообщить телу, чтобы оно оторвалось от пола? При каком условии такая скорость существует? Ускорение свободного падения g, трения нет.

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. Во сколько раз плотность атмосферы у поверхности Венеры превышает плотность воздуха у поверхности Земли? Атмосфера на Венере состоит из углекислого газа, давление на ее поверхности превышает давление воздуха на поверхности Земли в 100 раз, абсолютная температура на Венере составляет 7/3 от температуры на Земле.

4. На бесконечной плоскости лежит сфера радиусом R. Плоскость и сфера имеют одинаковую поверхностную плотность заряда σ. Определите максимальную напряженность электрического поля такой системы.

5. Запаянная горизонтальная пробирка с паром помещена в термостат. Посередине пробирки находится непроницаемый подвижный поршень. Давление пара в пробирке p, давление насыщенных паров при данной температуре $2p$. Найдите массу поршня, если после перевода пробирки в вертикальное положение объем под поршнем уменьшился в 4 раза. Внутреннее сечение пробирки S. Ускорение свободного падения g.

6. Конденсатор емкостью 1 мкФ выдерживает без пробоя напряжение 500 В, а конденсатор емкостью 0,5 мкФ — 1500 В. Какое наибольшее напряжение

можно подать на систему этих конденсаторов, соединенных последовательно?

Первое задание по математике

9 класс

1. Докажите, что для любого натурального числа n число $n/3+n^2/2+n^3/6$ — натуральное.

2. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько надо взять частей каждого из сплавов, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

3. Проверьте равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=9.$$

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие условию $|x-1|+|x+1|=2$.

5. Параллельные стороны трапеции равны a и b. Определите длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

6. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Составьте новое квадратное уравнение, корни которого обратны корням данного.

10 класс

1. Решите задачу 1 для 9 класса.

2. Решите задачу 2 для 9 класса.

3. Решите неравенство

$$-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\geqslant 1.$$

4. К двум окружностям с радиусами R и r, находящимся в положении внешнего касания, проведены их общие касательные — внутренняя и две внешние. Определите длину отрезка внутренней касательной, заключенного между внешними касательными.

5. Определите площадь треугольника, если две стороны соответственно равны 27 см и 29 см, а медиана третьей стороны равна 26 см.

6. Три числа, составляющих арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к ним прибавить соответственно 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Какими могут быть эти три числа?

11 класс

1. Докажите, что для любого нечетного натурального n число $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.

2. Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга (т. е. они имеют общие точки и общие касательные в этих точках), причем все три точки касания различны. Докажите, что эти окружности принадлежат либо одной сфере, либо одной плоскости.

3. Решите уравнение

$3\cdot 16^x+37\cdot 36^x=26\cdot 81^x$.

4. Решите задачу 4 для 10 класса.

5. Найдите точки экстремума для функции $y=x/(1+x^2)$.

6. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равны x_1 и x_2. Составьте новое квадратное уравнение, корни которого были бы $y_1=x_1/x_2$ и $y_2=x_2/x_1$.

Нам пишут

Плоское зеркало — это просто?

Кажется, нет ничего проще, чем получение изображения точечного источника света с помощью плоского зеркала. С другой стороны, считается, что плоское зеркало является единственным оптическим инструментом, дающим изображение предмета, полностью симметричное самому предмету.

Все сказанное верно, однако, лишь для специальных металлических зеркал, которые используются в различного рода оптических приборах. Известно, например, что практически полностью отражают падающий на них свет чистые серебряные пленки. Высокой отражающей способностью, близкой к идеальной, обладают и другие хорошо проводящие металлы.

Зеркала, с которыми мы имеем дело в обыденной жизни, отличаются от открытых металлических тем, что их отражающая поверхность покрывается специальным защитным прозрачным покрытием (чаще всего стеклянным). В результате ход лучей в таком зеркале оказывается более сложным и приводит к нежелательным эффектам. Так, расстояние от точечного источника света до плоской зеркальной поверхности уже не равно расстоянию от нее до изображения источника; к тому же само изображение источника не будет вполне точечным. Почему? Попробуем в этом разобраться.

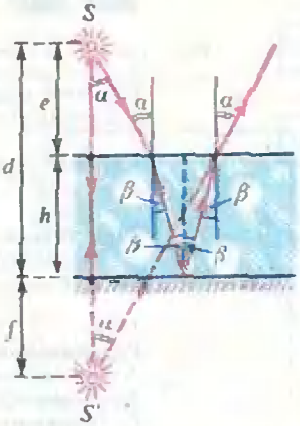
Рассмотрим плоское зеркало с защитным покрытием в виде прозрачного слоя толщиной h с показателем преломления n (см. рисунок). Из рисунка видно, что расстояние от источника до зеркальной поверхности равно

$$d=l+h,$$

а расстояние от поверхности до изображения —

$$f=(l\,\mathrm{tg}\,\alpha+2h\,\mathrm{tg}\,\beta)\,\mathrm{ctg}\,\alpha-h=$$

$$=l+\frac{2h}{n}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}-h.$$



Отсюда находим

$$f=d-2h\left(1-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)$$

— расстояние d от источника света до зеркальной поверхности не равно расстоянию f от нее до изображения источника. При этом расстояние f зависит от угла падения света α, а это значит, что изображение точечного источника света получается несколько размытым.

В пределе для лучей света, падающих близко к нормали зеркала (когда $\alpha\to0$), получаем

$$f=d-\frac{2h(n-1)}{n}.$$

Итак, в общем случае $f<d$, *а при нормальном падении лучей и при* $h\to0$ *величина* f *приближается к* d, *как этого и следовало ожидать.*

В заключение хотелось бы отметить, что изображение источника света в любом случае (есть защитное покрытие или его нет) получается *не в зеркале*, как обычно пишут, *а вне его.*

Г. Жариков

Ответы, указания, решения

К 4-й странице обложки
(см. «Квант» № 5)

См. рис. 1.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. Так как число 2310 имеет множителем число 11, оно не может быть произведением цифр никакого целого числа.

2. См. рис. 2.

3. Двузначных чисел, являющихся четвертыми степенями, всего два: 16 и 81, а трехзначных, являющихся кубами, пять: 125, 216, 343, 512 и 729. Отсюда следует, что последние три цифры числа — 2, 1, 6. Существует лишь одно число, оканчивающееся на 216 и являющееся полным квадратом. Это $9216=96^2$.

4. Так как $\triangle CEF\sim\triangle CAB$ (рис. 3), получаем, что $EC/AC=EF/AB$. Поскольку $\triangle AEF\sim\triangle ACD$, получаем, что $AE/AC=EF/CD$. Сложив эти равенства, получим $(EC+AE)/AC=EF/AB+$ $+EF/CD$. Заметим, что выражение слева равно 1. Разделив теперь обе части последнего равенства на EF, получим требуемое соотношение.

5. Пусть девочек было x, тогда Ирина танцевала с $(x+6)$ мальчиками, следовательно, $x+(x+6)=22$. Отсюда получаем, что девочек было 8, а мальчиков — 14.

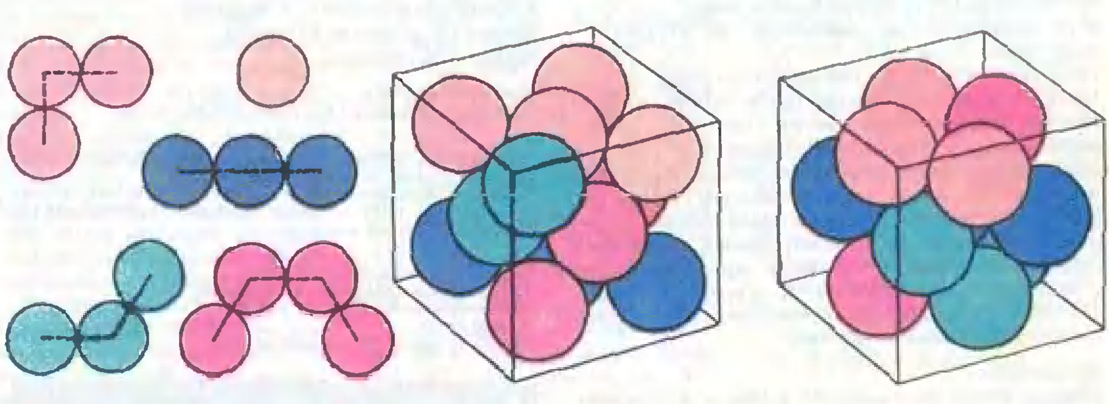


Рис. 1

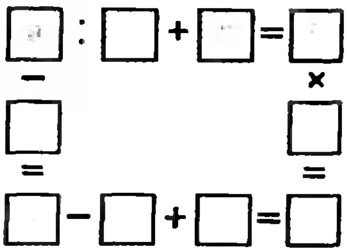


Рис. 2.

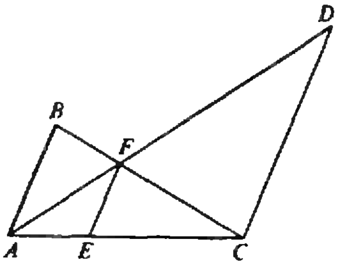


Рис. 3.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»
[redacted] «Квант» № 6)

1. Не изменится, так как количество вытесненной воды останется тем же.
2. Погрузил сперва на плот слона, отметил уровень погружения; затем грузил слитки золота на плот до такого же погружения.
3. Да, уменьшится на величину веса воды, вытесняемой стенками и дном ведра.
4. Нет, поскольку, увеличив выталкивающую силу, человек более значительно увеличил вес своей ноши (плотность сжатого воздуха в камере больше плотности наружного воздуха).
5. Вес в вакууме того дерева, которое в воздухе весит тонну, больше веса в вакууме того железа, которое весит в воздухе также одну тонну.
6. Не изменится.
7. Глубина погружения в ртуть уменьшится, так как возрастет выталкивающая сила за счет вытесненной шариком воды.
8. Нет. Ящик и русло реки — сообщающиеся сосуды, и вода в ящике будет на таком же уровне, как и вода в реке.
9. В первом — не изменится, во втором — понизится.
10. Бутылка с водой потонет, с ртутью — нет.
11. Когда камень находится в лодке, он вытесняет объем воды, масса которого равна массе камня. Поскольку плотность камня больше плотности воды, то объем вытесненной воды больше объема камня. Лежа на дне бассейна, камень вытесняет объем воды, равный лишь его собственному. Поэтому объем вытесненной им воды при попадании в бассейн уменьшается, и уровень падает.
12. Да — если вода проникнет под кубик, нет — в противном случае.

Микроопыт

Сгорая, свеча уменьшается в весе и всплывает, поэтому горит дольше, чем кажется поначалу.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.04.90. Подписано к печати 30.05.90. Т-10524
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,50. Тираж 16 3618 экз.
Заказ 722. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

[redacted]

Шахматная страничка

Изменения в кодексе

Напомним, что согласно шахматному кодексу партия заканчивается вничью, если в течение 50 ходов на доске не произошло ни одного взятия и ни одна пешка не сдвинулась с места. Лет двадцать назад это правило не допускало исключений. Но когда ЭВМ начали обнаруживать окончания, которые выигрываются, но при этом более 50 ходов не происходит ни взятий, ни движения пешек, пришлось менять каждое новое издание кодекса.

В предыдущем издании число 50 было увеличено до 100 для трех видов эндшпиля: ладья и слон против ладьи; два коня против пешки (если она блокирована на определенных полях); ладья и пешка против слона и пешки (при некоторых положениях пешек, например: у белых a2, у черных a3 при ладье у белых в чернопольном слоне у черных).

Совсем недавно ФИДЕ выпустила новый кодекс, а вслед за ним появилось и 12-е издание «Шахматного кодекса СССР». Эндшпиль «ладья и пешка против слона и пешки» вообще не рассматривается как исключительный.

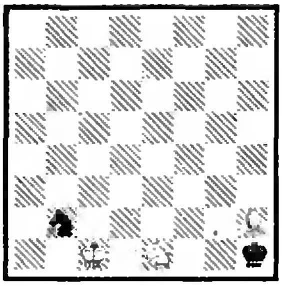
А число 50 увеличено до 75 для шести окончаний: ладья и слон против ладьи; два коня против пешки; ферзь и пешка против ферзя; ферзь против двух коней; ферзь против двух слонов; два слона против коня.

В «Кванте» рассказывалось о каждом из этих окончаний и приводились рекордные позиции. В них действительно взятие фигуры, движение пешки или мат происходили в промежутке между 50-м и 75-м ходами. Но пока готовилось новое издание кодекса, компьютер обнаружил новые рекордные позиции.

Первая связана с уже исследованным эндшпилем «два коня против пешки». Еще год назад считалось, что рекорд здесь равен 69 ходам (при ладейной пешке), теперь же он доведен до 82 ходов.

1. Kb4+ Kpb6 2. Kd3. Пешка блокирована, и теперь белый король и второй конь начинают долгую погоню за неприятельским королем. **2... Kpc7 3. Kb5+ Kpc6 4. Ka3 Kpb6 5. Kpb8 Kpc6 6. Kc4 Kpb5 7. Kce5 Kpb6 8. Kpc8 Kpa6 9. Kpc7 Kpb5 10. Kpd6 Kpa4 11. Kpc5 Kpb3 12. Kpb5 Kpc3 13. Kpa4 Kpc2 14. Kpb4 Kpd1 15. Kpb3 Kpd2 16. Kpb2 Kpd1 17. Kc4 Kpe2 18. Kpc2 Kpf3 19. Kpd2 Kpg3 20. Kpe2 Kpg2 21. Kce5 Kpg3 22. Kpf1 Kph4 23. Kpg2 Kpg5 24. Kpf3 Kpf5 25. Kc4 Kpf6 26. Kpf4 Kpe6 27. Kpe4 Kpf6 28. Kpd5 Kpe7 29. Kpe5 Kpf7 30. Kpd6 Kpf6 31. Kd2 Kpf5 32. Kpe7 Kpg6 33. Kpe6 Kpg7 34. Ke4 Kpg6 35. Kpe5 Kpg7 36. Kpd6 Kph7 37. Kd2 Kpg7 38. Kpe6 Kpf8 39. Ke4 Kpe8 40. Kf6+ Kpf8 41. Kh5 Kpe8 42. Kg7+ Kpd8 43. Kpd6 Kpc8 44. Ke6 Kpb8 45. Kpc5 Kpa7 46. Kpc6 Kpa6 47. Kec5+ Kpa5 48. Kb3+ Kpa4 49. Kd2 Kpa5 50. Kpc5 Kpa6 51. Kc4 Kpb7 52. Kpd6 Kpc8 53. Kb5 Kpd8 54. Kb7+ Kpe8 55. Kpe6 Kpf8 56. Kd6 Kpg7 57. Kpf5 Kph6 58. Kpf6 Kph5 59. Kf7 Kpg4 60. Kg5 Kph4 61. Kpf5 Kpg3 62. Kpe4 Kpg4 63. Kf7 Kph5 64. Kpf5 Kph4 65. Kfe5 Kph5 66. Kg4 Kph4 67. Kf6 Kph3 68. Kpe5 Kpg3 69. Kpe4 Kph3 70. Kpf3 Kph4 71. Kpf4 Kph3 72. Ke8 Kph4 73. Kg7 Kph3 74. Kf5 Kpg2 75. Kpg4 Kph2 76. Kd6 Kpg2 77. Kc4 Kph2 78. Kd2 Kpg2 79. Kph4 Kph2 80. Kf4 Kpg1 81. Kpg3 Kph1 82. Kf3 d3.** Наконец-то! **83. Kh3 d2 84. Kf2×.**

Второй рекорд связан с малоисследованным эндшпилем, которым раньше не занималась и машина. Занялась — и вот новое удивительное открытие компьютера: слон и конь справляются с конем лишь за 77 ходов!



1. Cg3 Kc4 2. Kpd1 Ke3+ 3. Kpe2 Kf5 4. Cf2 Ke7 5. Kpf3 Kc6 6. Kpg3 Kd4 7. Kpg4 Kc6 8. Kph3 Kb4 9. Cb6 Kd3 10. Kc2 Kf2+ 11. Kpg3 Ke4+ 12. Kpf4 Kd2 13. Ke3 Kph2 14. Kpg4 Kb3 15. Ca7 Kc1 16. Cd4 Kd3 17. Kph4 Kf2 18. Ce5 Kpg1 19. Cc3 Ke4 20. Ce1 Kf6 21. Kpg5 Kd7 22. Kpf4 Kc5 23. Kpf3 Ke6 24. Cc3 Kph2 25. Kpg4 Kd8 26. Ce5+ Kpg1 27. Kpg3 Ke6 28. Cf6 Kc5 29. Cd4 Kb3 30. Ca7 Kd2 31. Ke4+ Kph1 32. Ke5 Kc4 33. Kd3 Kd6 34. Kph3 Kf7 35. Ce3 Ke5 36. Kf4 Kc4 37. Cd4 Kd6 38. Kh5 Ke4 39. Ce3 Kf2+ 40. Kpg3 Ke4+ 41. Kpf3 Kd6 42. Cf4 Kc4 43. Kpf2 Ka5 44. Kf6 Kb7 45. Kpf3 Kd8 46. Cd6 Kpg1 47. Ke4 Kc6 48. Kd2 Kd4+ 49. Kpe4 Ke2 50. Kpe3 Kc3 51. Ce5 Ka2 52. Kpf3 Kb4 53. Kpg3 Kph1 54. Cd4 Kc6 55. Ce5 Kd8 56. Ke4 Kb7 57. Cb4 Kd8 58. Ca5 Ke6 59. Cb6 Kg5 60. Kf2+ Kpg1 61. Kpf4 Kf7 62. Kg4+ Kpg2 63. Ke3+ Kph3 64. Kf5 Kpg2 65. Cc5 Kh8 66. Kd4 Kph3 67. Kpf5 Kph4 68. Ke6 Kph5 69. Ce3 Kf7 70. Kg7+ Kph4 71. Cf4 Kh8 72. Ke6 Kf7 73. Kpg6 Kh8+ 74. Kpg7 Kpg4 75. Ch6 Kph5 76. Kf4+ Kpg4 77. Kp:h8.

Конь уничтожен, но игра не кончается и скорее всего продолжится более 100 ходов.

Так что новый шахматный кодекс уже требует изменений и дополнений. Да, за компьютером трудно угнаться!

Е. Гик

45 коп.
Индекс 70465

Если вас заинтересовали непростые проблемы «Суперузлов» из статьи «Превращения головоломки адмирала Макарова» (с. 70), попробуйте свои силы в следующих задачах.

1. Придумайте головоломку, которая имеет следующий алгоритм:

$$(6\bar{z})^2,\ 3\bar{x},\ 1z,\ 4x,\ 2x,\ 2y,\ 5x,\ 5z,\ 3z,\ 3\bar{y}\uparrow.$$

Обратите внимание, что это будет улучшение головоломки рисунка 5 (с. 74) с доведением ее сложности до 10.

2. Найдите алгоритмы решения головоломок, показанных на рисунке 1 (сложности 10) и рисунке 2 (сложности 12).

3. Придумайте головоломку с алгоритмом решения

$$4\bar{z},\ 1\bar{z},\ (2,3)x,\ 2\bar{z},\ 3\bar{x},\qquad (6z)^2,\ 3x,\ 2z,\ (2,3,6)x\uparrow.$$

4. Можно ли добавить в конце алгоритма предыдущей задачи ход 6y и придумать головоломку с этим или другим алгоритмом сложности 13? Решение этой задачи неизвестно. Ваши разработки вместе с моделями присылайте в редакцию.*

Может быть, вы сумеете открыть новые превращения «головоломки адмирала Макарова» и побьете существующие рекорды.

Д. Вакарелов

Рис. 1.

Рис. 2.